תרגיל מס 4 - אינפי 4 תשע"ט - פתרונות

1. תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ פרמטריזציה חלקה Γ ב $\mathbb{R}^2$ בעלת וקטור משיק באורך יחידה T ווקטור נורמל N המוגדרים על ידי

$$T\left(\gamma\left(t\right)\right) = \frac{\gamma'\left(t\right)}{\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|} = \frac{1}{\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|}\left(\gamma_1'\left(t\right), \gamma_2'\left(t\right)\right)$$
$$N\left(\gamma\left(t\right)\right) = \frac{1}{\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|}\left(\gamma_2'\left(t\right), -\gamma_1'\left(t\right)\right).$$

בהינתן שדה וקטורי $F = (F_1, F_2)$ יהי $\omega = -F_2 \mathrm{d}x + F_1 \mathrm{d}y$. הראו שמתקיים

$$\int_\gamma F \cdot N \mathrm{d}s = \int_\gamma \omega .$$

פתרון. נפתח את הביטויים ונשווה אותם.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot N \mathrm{d}s &= \int_a^b F\left(\gamma\left(t\right)\right) \cdot N\left(\gamma\left(t\right)\right) \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(F_1\left(\gamma\left(t\right)\right), F_2\left(\gamma\left(t\right)\right)\right) \frac{1}{\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|}\left(\gamma_2'\left(t\right), -\gamma_1'\left(t\right)\right) \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b F_1\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma_2'\left(t\right) - F_2\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma_1'\left(t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_\gamma -F_2 \mathrm{d}x + F_1 \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

כנדרש.

2. יהי $p \in \mathbb{R}^2$, ויהי $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2$ שדה וקטורי המוגדר על ידי

$$F\left(x\right) = \nabla \log \left\|x - p\right\|^2 .$$

יהי C מעגל עם מרכז ב p מכוון נגד כיוון השעון. הראו על ידי חישוב ישיר (או בכל דרך אחרת) שמתקיים:

$$\int_C F \cdot N \mathrm{d}s = 4\pi$$

כאשר $F \cdot N$ מוגדר כמו בתרגיל הקודם.

פתרון 1. נחשב תחלה את F.

$$\begin{aligned}F&=\nabla\log\|x-p\|^2\\&=\nabla\log\left((x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2\right)\\&=\left(\frac{2(x_1-p_1)}{(x_1-p_1)^2+(x_2+p_2)^2},\frac{2(x_2-p_2)}{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2}\right)\end{aligned}$$

על פי הסעיף הקודם, האינטגרל הופך ל

$$.\int_C F\cdot N\mathrm{d}s=\int_C -F_2\mathrm{d}x_1+F_1\mathrm{d}x_2$$

נבחר פרמטריזציה $(x_1,x_2)=\gamma(\theta)$

$$\begin{aligned}x_1&=p_1+R\cos\theta\\x_2&=p_2+R\sin\theta\end{aligned}$$

כאשר R הוא הרדיוס של המעגל המבוקש ו $0\le\theta\le2\pi$. נציב ונקבל

$$\begin{aligned}\int_C -F_2\mathrm{d}x_1+F_1\mathrm{d}x_2&=\int_\gamma -F_2\mathrm{d}x_1+F_1\mathrm{d}x_2\\&=\int_0^{2\pi}-F_2(\gamma(\theta))\gamma_1'(\theta)+F_1(\gamma(\theta))\gamma_2'(\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}-\frac{2R\sin\theta}{R^2}(-R\sin\theta)+\frac{2R\cos\theta}{R^2}R\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}2\mathrm{d}\theta=4\pi\end{aligned}$$

כנדרש.

3. תהי C עקומה חלקה ב $\mathbb{R}^2$ וסגורה מכוונת נגד כיוון השעון הגוקפת את הנקודות $p_1,\dots,p_n$. נגדיר

$$F(x)=\sum_{i=1}^n q_i\nabla\log\|x-p_i\|^2$$

כאשר $q_1,\dots q_n\in\mathbb{R}$ הם קבועים. בעזרת משפט גרין ותרגיל הקודם הראו ש

$$.\int_C F\cdot N\mathrm{d}s=4\pi(q_1+\cdots+q_n)$$

פתרון. תחילה, נשים לב שלכל p, התבנית

$$\omega_p=\nabla\log\|x-p\|^2=$$

$$-\frac{2(x_2-p_2)}{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2}\mathrm{d}x_1+\frac{2(x_1-p_1)}{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2}\mathrm{d}x_2$$

הינה תבנית סגורה, מכיוון שמתקיים

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{2\left(x_2-p_2\right)}{\left(x_1-p_1\right)^2+\left(x_2-p_2\right)^2}\right)=$$

$$-2\frac{\left(x_1-p_1\right)^2-\left(x_2-p_2\right)^2}{\left(\left(x_1-p_1\right)^2+\left(x_2-p_2\right)^2\right)^2}=$$

$$2\frac{\left(x_2-p_2\right)^2-\left(x_1-p_1\right)^2}{\left(\left(x_1-p_1\right)^2+\left(x_2-p_2\right)^2\right)^2}=$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\left(x_1-p_1\right)}{\left(x_1-p_1\right)^2+\left(x_2-p_2\right)^2}\right)$$

מכאן נובע, שלכל תחום גרין D שלא מכיל את הנקודה p, מתקיים

$$\int_{\partial D}\omega_p=$$

$$\int_{\partial D}-\frac{x_2-p_2}{\left(x_1-p_1\right)^2+\left(x_2-p_2\right)^2}\mathrm{d}x+\frac{\left(x_1-p_1\right)}{\left(x_1-p_1\right)^2+\left(x_2-p_2\right)^2}\mathrm{d}y=$$

$$\int_D\frac{\partial}{\partial x_1}\partial\left(\frac{x_1-p_1}{\left(x_1-p_1\right)^2+\left(x_2-p_2\right)^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{x_2-p_2}{\left(x_1-p_1\right)^2+\left(x_2-p_2\right)^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

בפרט, לכל מעגל C שלא מכיל את p בחלק הפנימי שלו, מתקיים

$$.\int_C\omega_p=0$$

מצד שני, אם p הוא המרכז של C ו C מכוון נגד כיוון השעון, אזי על פי התרגיל הקודם, מתקיים

$$\int_C\omega_p=4\pi$$

על פי התרגיל הקודם. נחבר את הטענות האלה ונחשב את הערך התבנית על מעגל

C_i כאשר C_i הוא מעגל שמרכזו p_i ואם $j \neq i$ אזי p_j נמצא מחוץ למעגל. מתקיים:

$$\begin{aligned}\int_{C_i} F \cdot N \mathrm{d}s &= \int_{C_i} \left(\sum_{j=1}^{n} q_j \nabla \log \|x - p_j\|^2 \right) \cdot N \mathrm{d}s \\ &= \int_{C_i} \left(\sum_{j=1}^{n} q_j \nabla \log \|x - p_j\| \right) \cdot N \mathrm{d}s \\ &= \int_{C_i} \sum_{j=1}^{n} q_j (\nabla \log \|x - p_j\|) \cdot N \mathrm{d}s \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{C_i} q_j \omega_{p_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} q_j \int_{C_i} \omega_{p_j}\end{aligned}$$

מכיוון ש $\int_{C_i} \omega_{p_i} = 4\pi$ ו $\int_{c_i} \omega_{p_j} = 0$ על פי הדיון בתחילת התרגיל, נקבל

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \int_{C_i} \omega_{p_j} = 4 q_i \pi .$$

על מנת להוכיח את הטענה, נבנה תחום D באופן הבא. לכל i, נקיף את p_i במעגל מספיק קטן C_i שמוכל בחלק הפנימי של C ולא חותך את שאר המעגלים. תחום D הוא התחום המוגבל על ידי C והמעגלים הקטנים. האוריינטציה החיובית של ∂D היא נגד כיוון השעון עבור C ועם כיוון השעון עבור C_i. על פי הדיון הקודם, מתקיים

$$\int_{\partial D} F \cdot N \mathrm{d}S = \int_{C} F \cdot N \mathrm{d}S + \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} F \cdot N \mathrm{d}S$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{C} F \cdot N \mathrm{d}S = - \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} F \cdot N \mathrm{d}S$$

כאשר האוריינטציה של C_i היא עם כיוון השעון. לכן השוויון האחרון הופך ל

$$\int_{C} F \cdot N \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} F \cdot N \mathrm{d}S$$

כאשר C_i הוא נגד כיוון השעון. על פי החישוב הקודם, מקבלים

$$\int_{C_i} F \cdot N \mathrm{d}S = 4\pi q_i .$$

נחבר ונקבל את השוויון המבוקש:

$$\int_{C} F \cdot N \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} F \cdot N \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} 4\pi q_i .$$

4. חשבו את האינטגרלים

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

עם Γ נגד כיוון השעון עבור המקרים הבאים:

(א) $P = x^2(y+1), Q = -xy^2$ כאשר

$\Gamma = \left\{(x,y)|x^2+y^2=1\right\}$.

(ב) $P = x^2(y+1), Q = -xy^2$ כאשר

$\Gamma = \left\{(x,y)\,|x^2+y^2=1, y\geq 0\right\}$.

(ג) $P = x(x+y)^2 + e^{-x^3}, Q = e^{-(x-y)^3}$ כאשר

$\Gamma = \left\{(x,y)\middle|\,|x|+|y|=2\right\}$.

הדרכה: השתמשו בהחלפת משתנים $u = x+y$ ו $w = (x-y)$.

(ד) $Q = x$ $P = -y + \cos x$ ו

$\Gamma = \left\{(x,y)\,|x^2+3y^2+2xy=1\right\}$.

פתרון. זהה לשאלה 3 בתרגיל 4 בש"ב של תשע"ז.

5. הוכיחו כי עבור $a > b$ השטח של הציקלואידה

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} \leq \left(a^2-b^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

הוא

$$\frac{3\pi\left(a^2-b^2\right)^2}{8ab}.$$

הדרכה: הסבירו קודם מדוע

$$x = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$$
$$y = \frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$$

עבור $t\in[0,2\pi]$ היא פרמטריזציה של הציקלואידה המדוברת.

פתרון. זהה לשאלה 3 בתרגיל 4 בש"ב של תשע"ז.