מבחן בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (89-132)
פתרון מועד א (16.02.2017)

<u>שאלה 1</u> (15 נקודות)

הוכיחו את המשפט הבא:

משפט הנקודה הקריטית:

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I. תהי $c \in I$ ונניח שיש ל- f מינימום או מקסימום ב- c.
אחד מהבאים מתקיים בהכרח:

א. c היא נקודת קצה של I;
ב. $f'(c)$ אינה מוגדרת;
ג. $f'(c) = 0$.

<u>הוכחה</u>

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I. נניח שיש לפונקציה נקודת מקסימום ב- $c \in I$ (ההוכחה עבור מינימום אנלוגית). נניח ש- c אינה נקודת קצה של I, ונניח ש- $f'(c)$ מוגדרת.
צ"ל: $f'(c) = 0$.
יהי $x = c$ ויהי $\Delta x > 0$ אינפי'. מכיוון ש- $x = c$ היא נקודת מקסימום מתקיים:

$$\begin{aligned}
& f(c+\Delta x) \le f(c) \quad \wedge \quad f(c-\Delta x) \le f(c) \\
& \Rightarrow f(c+\Delta x) - f(c) \le 0 \quad \wedge \quad f(c-\Delta x) - f(c) \le 0 \\
& \Rightarrow \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0 \quad \wedge \quad \frac{f(c-\Delta x) - f(c)}{-\Delta x} \ge 0 \\
& \Rightarrow st\left(\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}\right) \le 0 \quad \wedge \quad st\left(\frac{f(c-\Delta x) - f(c)}{-\Delta x}\right) \ge 0 \\
& \Rightarrow f'(c) \le 0 \quad \wedge \quad f'(c) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = 0
\end{aligned}$$

<u>שאלה 2</u>

א. (7 נקודות) תהי $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה הנתונה באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+4)$.

הוכיחו ש- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת, וחשבו את גבולה.

<u>פתרון</u>

תחילה ננחש את הגבול. נסמן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$. לכן

$L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}(a_n+4)=\frac{1}{3}(L+4)$. מהמשוואה $L=\frac{1}{3}(L+4)$

מקבלים $L=2$.

כעת, על מנת להראות שהסדרה אכן מתכנסת לגבול הנ"ל, נוכיח שהיא חסומה ומונוטונית עולה.

<u>הסדרה עולה:</u>

נוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1}\ge a_n$, באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}$.

עבור $n=1$ מתקיים $\frac{5}{3}>1$ ולכן $a_2\ge a_1$.

נניח נכונות עבור n: $a_{n+1}\ge a_n$.

נוכיח נכונות עבור $n+1$: $a_{n+2}\ge a_{n+1}$.

ואכן מתקיים: $a_{n+2}=\frac{1}{3}(a_{n+1}+4)\ge\frac{1}{3}(a_n+4)=a_{n+1}$.

<u>הסדרה חסומה:</u>

נוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $1\le a_n\le 2$, באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}$.

עבור $n=1$ מתקיים $1\le 1\le 2$ ולכן $1\le a_1\le 2$.

נניח נכונות עבור n: $1\le a_n\le 2$.

נוכיח נכונות עבור $n+1$: $1\le a_{n+1}\le 2$.

ואכן, מצד אחד: $a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+4)\le\frac{1}{3}(2+4)=2$, ומצד שני:

$1<\frac{5}{3}=\frac{1}{3}(1+4)\le\frac{1}{3}(a_n+4)=a_{n+1}$.

לסיכום, הסדרה חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת, וגבולה הוא 2.

ב. (5 נקודות) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n+1}+2^{2n}}$.

<u>פתרון</u>

ניעזר במשפט הסנדוויץ'. תחילה נשים לב כי $2^{n+1}+2^{2n}=2\cdot 2^n+4^n$. כעת, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $4^n\le 2\cdot 2^n+4^n\le 2\cdot 4^n+4^n=3\cdot 4^n$, ולכן $\sqrt[n]{4^n}\le\sqrt[n]{2\cdot 2^n+4^n}\le\sqrt[n]{3\cdot 4^n}$, כלומר: $4\le\sqrt[n]{2\cdot 2^n+4^n}\le 4\sqrt[n]{3}$.

מכיוון שמתקיים $\lim_{n\to\infty}4=\lim_{n\to\infty}4\sqrt[n]{3}=4$, נקבל לפי משפט הסנדוויץ' כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n+1}+2^{2n}}=4$.

<u>שאלה 3</u>

א. (5 נקודות) חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^3-x\right)-3}{x}$.

<u>פתרון</u>

מכיוון שזהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, ניתן להשתמש בכלל להופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^3-x\right)-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{e^3-x}}{1}=-\frac{1}{e^3}.$$

ב. (20 נקודות) נתבונן בפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}a\ln\left(e^3+2-x\right) & x<2\\ x^2+bx+a & 2\le x<3\\ \frac{ax+9b}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right) & 3\le x\end{cases}.$$

1. עבור אילו ערכי $a,b\in\mathbb{R}$ הפונקציה הנ"ל רציפה ב-$\mathbb{R}$?

<u>פתרון</u>

תחילה נשים לב שבאינטרוולים $(-\infty,2),(2,3),(3,\infty)$ הפונקציה רציפה כהרכבה/מכפלה של פונקציות רציפות.

נותר לבדוק רציפות בנקודות $x=2, x=3$.

<u>רציפות בנקודה</u> $x=2$:

מתקיים:

$$\lim_{x\to 2^-} a\ln\left(e^3+2-x\right)=\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(a\ln\left(e^3+2-(2+\Delta x)\right)\right)=st\left(a\ln\left(e^3-\Delta x\right)\right)=3a$$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(x^2+bx+a\right)=4+2b+a$$

על מנת שהגבול ב-2 יהיה קיים, חייב להתקיים $4+2b+a=3a$, ולכן מקבלים את המשוואה $a=2+b$.

<u>רציפות בנקודה</u> $x=3$:

מתקיים:

$$\lim_{x\to 3^-}\left(x^2+bx+a\right)=9+3b+a$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{ax+9b}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{3a+a\Delta x+9b}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{1+\Delta x}\right)\right)$$

$$=\frac{3a+9b}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3a+9b}{2}$$

על מנת שהגבול ב-3 יהיה קיים, חייב להתקיים $9+3b+a=\frac{3a+9b}{2}$, ולכן

מקבלים את המשוואה $a=18-3b$.

כאשר פותרים את שתי המשוואות שמצאנו, מקבלים $a=6, b=4$.

2. הציבו בפונקציה f את ערכי ה-a,b שמצאתם בסעיף הקודם. האם f גזירה בנקודה $x=2$? הוכיחו את תשובתכם!

<u>פתרון</u>

נציב את הערכים $a=6, b=4$ בפונקציה, ונקבל את

$$f(x)=\begin{cases} 6\ln\left(e^3+2-x\right) & x<2 \\ x^2+4x+6 & 2\le x<3 \\ \dfrac{6x+36}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & 3\le x \end{cases}.$$

נחשב נגזרת לפי הגדרה בנקודה $x=2$.

מצד שמאל, עבור $0>\Delta x\approx 0$ מקבלים:

$$st\left(\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{6\ln\left(e^3+2-(2+\Delta x)\right)-18}{\Delta x}\right)$$

$$=st\left(\frac{6\ln\left(e^3-\Delta x\right)-18}{\Delta x}\right)=6\cdot st\left(\frac{\ln\left(e^3-\Delta x\right)-3}{\Delta x}\right)=-\frac{6}{e^3}$$

המעבר האחרון מתקיים בגלל סעיף א', שם ראינו כי

$$st\left(\frac{\ln\left(e^3-\Delta x\right)-3}{\Delta x}\right)=-\frac{1}{e^3}.$$

מצד ימין, עבור $0<\Delta x\approx 0$ מקבלים:

$$st\left(\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{(2+\Delta x)^2+4(2+\Delta x)+6-18}{\Delta x}\right)$$

$$=st\left(\frac{8\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\right)=8$$

סה"כ, מכיוון ש- $-\frac{6}{e^3}\neq 8$, נקבל שהפונקציה אינה גזירה בנקודה $x=2$.

ג. (5 נקודות) התבוננו שוב בפונקציה מסעיף ב' והציבו בה את הערכים $a=1, b=1$.

נתון שעבור הערכים האלה, f אינה רציפה בנקודה $x=2$. מהו סוג אי-הרציפות שם (סליקה, מין ראשון, מין שני)? הוכיחו את תשובתכם!

<u>פתרון</u>

נציב את הערכים $a=1, b=1$ בפונקציה ונקבל את

$$f(x)=\begin{cases}\ln\left(e^3+2-x\right) & x<2\\ x^2+x+1 & 2\le x<3\\ \dfrac{x+9}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & 3\le x\end{cases}.$$

נבדוק את הגבולות החד-צדדיים בנקודה $x=2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\ln\left(e^3+2-x\right)=\ln\left(e^3\right)=3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(x^2+x+1\right)=7$$

מכיוון שהגבולות החד-צדדיים קיימים ומתקיים $\lim_{x\to 2^-} f(x)\ne\lim_{x\to 2^+} f(x)$, נסיק שב-

$x=2$ יש נקודת אי-רציפות ממין ראשון (קפיצה).

<u>שאלה 4</u>

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר. הוכיחו את תשובתכם!

א. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)^n}{n!}$ עבור $a\in\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

נשתמש במבחן המנה: $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(a+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{(a+1)^n}{n!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a+1|}{n+1}=0<1$.

הטור <u>מתכנס בהחלט</u>.

ב. (7 נקודות) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-1}$.

<u>פתרון</u>

נשתמש במבחן ההשוואה לטורים חיוביים. לכל $2 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\frac{n+1}{n^3-1} \le \frac{2n}{n^3 - \frac{1}{2}n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2}.$$

כעת, הטור $\sum_{n=2}^{\infty} 4 \cdot \frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^3-1}$ <u>מתכנס</u>.

ג. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

<u>פתרון</u>

נבדוק תנאי הכרחי להתכנסות טור:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = st\left((-1)^H \left(1+\frac{1}{H}\right)^H\right) = \begin{cases} e & H \text{ is even} \\ -e & H \text{ is odd} \end{cases}.$$

בכל אופן, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq 0$ ולכן הטור <u>מתבדר</u>.

<u>שאלה 5</u>

א. (15 נקודות) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בכל נקודה. נניח שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: $f'(x) \le -1$, ובנוסף נתון כי $f(1) = 2$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (1,5)$ כך ש- $f(c) = 0$.

<u>פתרון</u>

לפי הנתון הפונקציה רציפה בקטע $[1,5]$ וגזירה בקטע $(1,5)$. לכן, לפי משפט לגרנז', קיימת נקודה $d \in (1,5)$ כך ש- $f'(d) = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{f(5)-2}{4}$.

נתון כי $f'(x) \le -1$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכן, בפרט, $f'(d) \le -1$.

נקבל: $\frac{f(5)-2}{4} \le -1$ ולכן $f(5) \le -2$.

כעת נתבונן שוב בקטע $[1,5]$. מתקיים: $f(1)>0, f(5)<0$ ולכן, לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $c\in(1,5)$ כך ש-$f(c)=0$.

ב. (10 נקודות) תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נגדיר פונקציה חדשה $f(x)=xg(x)+\sin x$. הוכיחו ש- f גזירה בנקודה $x=0$ ומצאו את $f'(0)$ (שימו לב כי תשובתכם יכולה להיות תלויה ב-g).

__פתרון__

יהי $0\neq\Delta x\approx 0$. לפי הגדרת הנגזרת מתקיים:

$$f'(0)=st\left(\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\Delta x\cdot g(\Delta x)+\sin\Delta x}{\Delta x}\right)=st\left(g(\Delta x)+\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)$$

מכיוון ש-g היא פונקציה רציפה, מתקיים: $st(g(\Delta x))=g(st(\Delta x))=g(0)$

ולכן $st\left(g(\Delta x)+\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)=g(0)+st\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)=g(0)+1$.

לכן f גזירה בנקודה $x=0$ ומתקיים: $f'(0)=g(0)+1$.

__**שאלת בונוס**__ (7 נקודות)

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נתון שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ המקיים: $g(x_0)=0,\quad g'(x_0)\neq 0$. הוכיחו שקיימת סביבה של x_0 שבה g מחליפה סימן, כלומר, הסביבה מכילה לפחות נקודה אחת x_1 עבורה $g(x_1)>0$ ולפחות נקודה אחת x_2 עבורה $g(x_2)<0$.

__**פתרון**__

נניח בשלילה ש<u>בכל</u> סביבה של x_0, הפונקציה g לא מחליפה סימן. כלומר, כולה חיובית או כולה שלילית.

נתבונן בסביבה כלשהי, ונניח כי לכל x בסביבה זו מתקיים $g(x)\geq 0$.

אזי, לפי הגדרת מינימום, ל-g יש מינימום מקומי בנקודה x_0. לכן, לפי משפט הנקודה הקריטית חייב להתקיים אחד מהשניים: $g'(x_0)$ לא קיימת או $g'(x_0)=0$.

לפי הנתון, $g'(x_0)$ קיימת כי הפונקציה גזירה, ולכן בהכרח $g'(x_0)=0$, אך זו סתירה לנתון.

לכן, לא יתכן כי לכל x בסביבה זו מתקיים $g(x)\ge 0$.

כלומר, לא קיימת סביבה שבה g חיובית לכל x.

באופן דומה מראים שלא קיימת סביבה שבה g שלילית לכל x.

כאשר משלבים את שתי הטענות, מקבלים שבכל סביבה חייבת להיות לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה שלילית, ולפחות נקודה אחת שבה היא חיובית.

בהצלחה בהמשך השנה!