מתמטיקה לכימאים - פתרון תרגיל 4

עוזי חרוש ועולא אמארה

תרגיל 1. עבור הפונקציות הבאות, מצא את פונקצית הגבול, תחום התכנסות וקבע האם ההתכנסות בתחום ההתכנסות היא התכנסות נקודתית או במ"ש

1. $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1+x^2+n^2}$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית,

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(nx)}{1+x^2+n^2} = 0$$

לכל x לכן תחום ההתכנסות הוא כל x. כעת, נבדוק את ההפרש בין סדרת הפונקציות לפונקציה הגבול

$$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{\cos(nx)}{1+x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

כלומר ההפרש המקסימלי שואף ל-0, לכן יש התכנסות במ"ש בכל תחום ההתכנסות .

2. $f_n(x) = \cos^{2n}(x)$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שלכל $x = \pi k$ מתקיים

$$f_n(\pi k) = \cos^{2n}(\pi k) = (\pm 1)^{2n} = 1$$

בעוד שעבור $x \neq \pi k$ מתקיים $-1 < \cos(x) < 1$

$$f_n(x) = \cos^{2n}(x) \to 0$$

לכן

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \pi k \\ 1 & x = \pi k \end{cases}$$

מכאן שתחום ההתכנסות הוא כל x. נשים לב שפונקצית הגבול לא רציפה בעוד ש-$f_n(x)$ רציפות, לכן התכנסות במ"ש לא אפשרית, וההתכנסות היא התכנסות נקודתית.

3. $f_n(x) = x^n(1-x^n)$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, על ידי חולקה לתחומים

$$x < -1,\ x = -1,\ -1 < x < 1,\ x = 1,\ x > 1$$

ואז מתקיים

$$f(x) = \begin{cases} \infty & x < -1 \\ \text{not exists} & x = -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ -\infty & x > 1 \end{cases}$$

מכאן שתחום ההתכנסות הוא $-1 < x \le 1$ והפונקציה הגבולית במקרה הזה היא $f\left(x\right)=0$. כדי לבדוק התכנסות במ"ש נגדיר

$$r_{n}\left(x\right)=\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=x^{n}\left(1-x^{n}\right)$$

בעזרת גזירה נקבל שיש נקודת מקסימום ל-$r_{n}\left(x\right)$ ב- $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ וערכה

$$r_{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\frac{1}{4}\nrightarrow0$$

לכן אין התכנסות במ"ש.

4. $f_{n}\left(x\right)=\frac{\sin(nx)\cos((n+1)x)}{n}$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שלכל xהמונה חסום לכן הפונקציה הגבולית היא

$$f\left(x\right)=0$$

מכאן שתחום ההתכנסות הוא כל x. כדי לבדוק התכנסות במ"ש נגדיר

$$r_{n}\left(x\right)=\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|\frac{\sin\left(nx\right)\cos\left(\left(n+1\right)x\right)}{n}\right|\le\frac{1}{n}\rightarrow0$$

כלומר ההפרש בין סדרת הפונקציות לפונקצית הגבול קטן מ-$\frac{1}{n}$ ששואף ל-0, לכן ההתכנסות היא התכנסות במ"ש.

5. $f_{n}\left(x\right)=\frac{2x}{1+n^{2}x^{2}}$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שאם נקבע את x על x_{0} נקבל ש-

$$f_{n}\left(x_{0}\right)=\frac{2x_{0}}{1+n^{2}x_{0}^{2}}\overset{n\rightarrow\infty}{\Longrightarrow}0$$

מכאן שתחום ההתכנסות הוא כל x והפונקציה הגבולית במקרה הזה היא $f\left(x\right)=0$. כדי לבדוק התכנסות במ"ש נתבונן בהפרש עבור $x>0$

$$r_{n}\left(x\right)=\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|\frac{2x}{1+n^{2}x^{2}}\right|=\frac{2x}{1+n^{2}x^{2}}$$

בעזרת גזירה ונקבל

$$r_{n}'\left(x\right)=\frac{2\cdot\left(1+n^{2}x^{2}\right)-2x\left(2n^{2}x\right)}{\left(1+n^{2}x^{2}\right)^{2}}=\frac{2-2n^{2}x^{2}}{\left(1+n^{2}x^{2}\right)^{2}}$$

כלומר יש נקודת קיצון (בדקו שהיא מקסימום) ב-$x_{max}=\frac{1}{n}$ שערכה

$$r_{n}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2\frac{1}{n}}{1+n^{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{2}}=\frac{1}{n}\rightarrow0$$

לכן יש התכנסות במ"ש. למעשה היה צריך לבדוק בצורה דומה גם את המקרה שבו $x<0$ ואז

$$r_{n}\left(x\right)=\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|\frac{2x}{1+n^{2}x^{2}}\right|=-\frac{2x}{1+n^{2}x^{2}}$$

6. $f_n(x) = 4 - x^n$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, על ידי חולקה לתחומים

$$x < -1,\ x = -1,\ -1 < x < 1,\ x = 1,\ x > 1$$

ואז מתקיים

$$f(x) = \begin{cases} \text{not exists} & x < -1 \\ \text{not exists} & x = -1 \\ 4 & -1 < x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ -\infty & x > 1 \end{cases}$$

מכאן שתחום ההתכנסות הוא $-1 < x \leq 1$ והפונקציה הגבולית במקרה הזה היא

$$f(x) = \begin{cases} 4 & -1 < x < 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

נשים לב $f_n(x)$ היא סדרת פונקציות רציפות בעוד ש-$f(x)$ אינה רציפה, לכן אין התכנסות במ"ש.

תרגיל 2. בדוק האם ישנה התכנסות במ"ש של הסדרות הבאות התחום הנתון

1. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ בתחום $0 \leq x < \frac{1}{2}$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שאם נקבע את x על x_0 נקבל ש-

$$f_n(x_0) = \frac{x_0^n}{1+x_0^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

מכאן שהפונקציה הגבולית במקרה הזה היא $f(x) = 0$. כדי לבדוק התכנסות במ"ש נגדיר

$$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n}$$

נגזור את הפונקציה ונקבל ש-

$$r_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - nx^{n-1}x^n}{(1+x^n)^2} = \frac{1}{(1+x^n)^2} > 0$$

הנגזרת חיובית לכן הפונקציה מונוטינית עולה כלומר

$$r_n(x) < r_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} \to 0$$

מכאן יש התכנסות במ"ש

2. $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ $2 \leq x \leq 4$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שאם נקבע את x על $2 \leq x_0 \leq 4$ נקבל ש-

$$f_n(x_0) = \frac{1}{1+x_0^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

מכאן שהפונקציה הגבולית במקרה הזה היא $f(x) = 0$. כדי לבדוק התכנסות במ"ש נגדיר

$$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+x_0^n} \leq \frac{1}{1+2^n} \to 0$$

לכן יש התכנסות במ"ש בקטע הנתון.

3. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ $f_n(x) = \sin^n(x)$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שאם נקבע את x על $0 \le x_0 \le \frac{\pi}{2}$ נקבל ש-

$$f_n(x_0) = \sin^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

נשים לב שפונקצית הגבול אינה רציפה בעוד שהסדרה היא של פונקציות רציפות, לכן אין התכנסות במ"ש.

תרגיל 3. מצא את תחום ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n^{-\frac{1}{\ln(x)}}$

פתרון. נקבע את x ל-x_0, נתבונן בטור של הערכים המוחלטים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1} n^{-\frac{1}{\ln(x_0)}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{\ln(x_0)}}}$$

ידוע שהטור הזה מתכנס עבור חזקה גדולה מ-1, לכן נבדוק מתי זה קורה בעזרת מבחן השורש של קושי נקבל ש-

$$\frac{1}{\ln(x_0)} > 1 \qquad \frac{1}{\ln(x_0)} < \infty$$

$$\ln(x_0) < 1 \qquad \ln(x_0) > 0$$

$$x_0 < e \qquad x_0 > 1$$

כלומר עבור $1 < x_0 < e$ יש התכנסות בהחלט של הטור.

עבור הטור $x_0 \ge e$ נקבל

$$n^{-\frac{1}{\ln(x_0)}}$$

מונו יורד ל-0 לכן לפי לייבניץ יש התכנסות של הטור. מכאן תחום ההתכנסות הוא $x > 1$

תרגיל 4. האם הטורים הבאים מתכנסים במ"ש

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(nx)}{n^3}$ עבור כל x

פתרון. לכל x מתקיים $\left|\frac{\cos^2(nx)}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ ואם נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

אז הוא מתכנס לכן לפי ווישטרס טור הפונקציות מתכנס במ"ש.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^2+1}$ עבור כל x

פתרון. לכל x מתקיים

$$\left|\frac{(-1)^n}{x^2+n^2+1}\right| = \frac{1}{x^2+n^2+1} \le \frac{1}{n^2}$$

ואם נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

אז הוא מתכנס לכן לפי ווישטרס טור הפונקציות מתכנס במ"ש.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{\sqrt[5]{x^8+n^8}}$ עבור כל x

פתרון. לכל x מתקיים

$$\left|\frac{\sin^2(nx)}{\sqrt[5]{x^8+n^8}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[5]{x^8+n^8}} \leq \frac{1}{n^{\frac{8}{5}}}$$

ואם נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{8}{5}}}$$

אז הוא מתכנס לכן לפי ווישטרס טור הפונקציות מתכנס במ"ש.

תרגיל 5. מצא את תחום ההתכנסות של טורי החזקות הבאות :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ ולכן

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

כלומר לכל x הטור הנל מתכנס.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n = \frac{n!}{n^n}$ ולכן

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{n^n\,(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = e$$

כלומר הטור הנל מתכנס תחום $|x| < e$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n = \frac{3^n}{n!}$ ולכן

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n}{n!}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3} = \infty$$

כלומר לכל x הטור הנל מתכנס.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ולכן

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+3}{n}\right| = 1$$

כלומר הטור הנל מתכנס תחום $|x| < 1$.

בהצלחה!!