

מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 9 - פתרון

1. יהי X מ"ט קומפקטי ו- $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

הוכיחו שקיימים $x_1, x_2 \in X$ כך

ש- $f(x_1) = \min\{f(x) \mid x \in X\}$

ו- $f(x_2) = \max\{f(x) \mid x \in X\}$.

הוכחה

הקבוצה $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית כתמונה של מרחב קומפקטי תחת פונקציה רציפה. לכן $f(X)$ סגורה כי $\mathbb{R}$ מ"ט האוסדורף.

היא גם חסומה כקבוצה קומפקטית במרחב מטר.

לכל קבוצה חסומה ב- $\mathbb{R}$ ישנם $\sup$ ו- $\inf$ (סופיים).

כלומר קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a = \inf_{x \in X} f(x)$ ו- $b = \sup_{x \in X} f(x)$.

אם $a = b$ אז לכל $x \in X$ מתקיים: $a = b \leq f(x) \leq a = b$ והכל הוכח.

אם $a < b$ אפשר להוכיח ש- $a, b \in f(X)$ כי ש- $f(X)$ סגורה.
=====

(אכן: אם נניח – בשלילה – ש- $a \notin f(X)$ אז $a \in f(X)^c$.

$f(X)^c$ קבוצה פתוחה, לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך

ש- $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap f(X) = \emptyset \Leftrightarrow (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq f(X)^c$.

אבל לפי הגדרת $\inf$, $a + \varepsilon$ אינו חסם של $f(X)$ מלמעלה,

כלומר, קיים $x_0 \in X$ כך ש- $a \leq f(x_0) < a + \varepsilon$. סתירה.
בדיוק באותה דרך מוכיחים ש- $b \in f(X)$

=====

זה אומר שקיימים $x_1, x_2 \in X$ כך ש- $f(x_1) = a, f(x_2) = b$ או במילים אחרות:

$f(x_1) = \min\{f(x) \mid x \in X\}$ ו- $f(x_2) = \max\{f(x) \mid x \in X\}$

מש"ל.

2. יהיו X, Y מ"ט לא ריקים. הוכיחו ש- $X \sqcup Y$ מ"ט לא קשיר.

הוכחה

כמו שנאמר בהרצאה המרחבים X, Y מוכלים ב- $X \sqcup Y$ כתת קבוצות זרות ופתוחות כך שאיחודן שווה ל- $X \sqcup Y$ כולו. לפי התנאי הן גם אינן ריקות. לכן $X \sqcup Y$ אינו קשיר, מש"ל.

3. יהיו $X_1, \dots, X_n$ מרחבים קומפקטיים זרים. הוכיחו ש- $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ מרחב קומפקטי.

הוכחה

אפשר לראות את המ"ט $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ כ- $\bigcup_{i=1}^n X'_i$ כאשר X'_i תת-מרחב הומאומורפי ל- X_i ולכן גם קומפקטי. בנוסף, X'_i - קבוצה פתוחה ב- $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$. נשאר להוכיח שאחד סופי של תת-מרחבים קומפקטיים. מספיק לעשות את זה לשני מרחבים כי לאחר מכן קל להמשיך לפי אינדוקציה.

יהי $Z = X \sqcup Y$. יהיו X, Y קבוצות קומפקטיות ויהי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של Z . אז הוא גם כיסוי פתוח של X ושל Y (ככיסוי של תת-קבוצות). לכן הוא מכיל כיסוי פתוח סופי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in F_1}$ של X וכיסוי פתוח סופי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in F_2}$ של Y ($F_1, F_2 \subseteq I$ - קבוצות אינדקסים סופיות). אזי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in F_1 \cup F_2 \subseteq I}$ תת כיסוי סופי של Z . לכן Z קומפקטי. בעזרת אותה לוגיקה מקבלים באינדוקציה ש- $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n = \bigcup_{i=1}^n X'_i$ מ"ט קומפקטי, מש"ל.

4. כידוע ספרה $1 - n$ -מימדית $S^{n-1}(a, r)$ ב- $\mathbb{R}^n$ עם מרכז $a \in \mathbb{R}^n$ ורדיוס $r > 0$ היא

קבוצה $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$, כאשר $\|\cdot\|$ נורמה אוקלידית ב- $\mathbb{R}^n$.

הוכיחו שכל ספרות $1 - n$ -מימדיות הומאומורפיות.
(רמז. הוכיחו שכל ספרה הומאומורפית לספרה $S^{n-1}(0, 1)$ כאשר 0 – ראשית הצירים.)

הוכחה

נגדיר שתי פונקציות $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

כך ש- $f((x_1, \dots, x_n)) = (a_1 + rx_1, \dots, a_n + rx_n)$

לכל $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

ו- $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

כך ש- $g((y_1, \dots, y_n)) = (\frac{y_1 - a_1}{r}, \dots, \frac{y_n - a_n}{r})$

לכל $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

נסמן: $f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך

ש- $f_1(x) = a_1 + rx_1, \dots, f_n(x_n) = a_n + rx_n$

ו- $g_1, \dots, g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך

ש- $g_1(y_1) = \frac{y_1 - a_1}{r}, \dots, g_n(y_n) = \frac{y_n - a_n}{r}$.

אזי רואים (לפי הגדרות)

ש- $f = f_1 \times \dots \times f_n$

ו- $g = g_1 \times \dots \times g_n$.

כל הפונקציות $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ רציפות כסכומים ומכפלות (במובן אריתמטי) של פונקציות רציפות. לכן גם פונקציות f, g רציפות (משפט מההרצאה).

חוץ מזה, אפשר לבדוק ישירות

ש- $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^n}$ ו- $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^n}$ (***)

נוכיח שספרה $S^{n-1}(O, 1)$ הומאומורפית לספרה $S^{n-1}(a, r)$.

יהי $x = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}(0, 1)$ וזו

$$||x|| = 1 \Rightarrow ||f(x) - a|| = r$$

אכן)

$$(\|f(x) - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + x_i r - a_i)^2} = r \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = r$$

$$x \in S^{n-1}(0, 1) \Rightarrow f(x) \in S^{n-1}(a, r) \text{ כלומר}$$
$$f(S^{n-1}(0, 1)) \subseteq S^{n-1}(a, r) \cap \mathcal{K}$$

בדיוק באותה דרך נקבל

$$g(S^{n-1}(a, r)) \subseteq S^{n-1}(0, 1) - \psi$$

לכן אם נעבור לצמצומים אז מ- (****) נקבל:

$$g|_{S^{n-1}(a,r)} \circ f|_{S^{n-1}(0,1)} = Id_{S^{n-1}(0,1)}$$

$$f|_{S^{n-1}(0,1)} \circ g|_{S^{n-1}(a,r)} = Id_{S^{n-1}(a,r)}$$

כיוון שצמצומים של פונקציות רציפות בעצמם רציפים, הוכחנו

שהספרות $S^{n-1}(0, 1)$ ו- $S^{n-1}(a, r)$ הומאומורפיות.

הספרה $S^{n-1}(a,r)$ היא ספרה אקראית, לכן זה גורר

שכל ספרות $1 - n$ - מימדיות הומאומורפיות זו לזו, מש"ל.

[illegible]

לינאריות מעל $\mathbb{R}$.

הוכיחו שקבוצת הווקטורים $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ שמהווים

פתרונות של המערכת היא קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^n$.

הוכחה

לכל $1 \leq i \leq m$ נסמן ב- $L_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ את ההעתקה:

$$.L_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$$

את הנוסחה אפשר לשכתב בצורה:

$$L_i(x) = a_{i1}p_1(x) + \dots + a_{in}p_n(x)$$

כאשר p_j היא ההטלה של $\mathbb{R}^n$ לגורם מס' j . אזי $L_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ היא ההרכבה של כמה פונקציות הטלה, מכפלה (אריתמטית) וסכום, שרציפותן הוכחה בהרצאה. לכן $L_i(x)$ רציפה. את קבוצת הפתרונות S_i של המשוואה $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ אפשר להציג כ- $\mathbb{R}^n$, $L_i^{-1}(\{b_i\}) \subset \mathbb{R}^n$, כלומר, כתמונה הפוכה של קבוצה סגורה $\{b_i\} \subset \mathbb{R}$ תחת הפונקציה הרציפה L_i . לכן S_i סגורה. ולבסוף: קבוצת הפתרונות של כל המערכת היא חיתוך $S_1 \cap \dots \cap S_m$ של קבוצות סגורות ואז גם קבוצה סגורה, מש"ל.

6. יהי $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ עם מקדמים ממשיים, יהי X מרחב

טופולוגי ותהא $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נסמן: $g := P \circ f$. הוכיחו ש- g פונקציה רציפה.

הוכחה

נוכיח קודם ש- $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכחה באינדוקציה.

$n = 0$. $P(x) = a_0$ - רציפה כפונקציה קבועה.

נניח שפולינום שהחזקה שלו n רציף.

$$a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_0 = x \cdot (a_{n+1}x^n + \dots + a_1) + a_0$$

אזי הפולינום החדש שחזקתו $n + 1$ רציף כהרכבת מכפלה

(אריתמטית) וסכום של פונקציות רציפות.

לכן P רציפה, אזי $g = P \circ f$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות, מש"ל.