תרגול 5 - עם פתרונות בהרחבה

1. הגדרה: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו $A \subseteq X$ תת קבוצה.. נגדיר את הטופולוגיה על A המושרית מ X להיות $\tau_A = \{A \cap O : O \in \tau\}$. הזוג (A,τ_A) נקרא תת מרחב טופולוגי של (X,τ).
דוגמא: $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$, הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה האוקלידית. אזי תת המרחב $A = [0,1)$ הוא הקבוצה A עם הטפולוגיה $\tau_A = \{[0,1) \cap O : O \in \tau_{\mathbb{R}}\}$ ולכן למשל $[0,\frac{1}{2})$ פתוח ב A, כחיתוך של $[0,1)$ עם $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

2. תרגיל: יהא (X,d) מ"מ ו τ המטריקה המושרית. תהא A תת קבוצה. הוכיחו כי המטריקה המצומצמת ל A משרה את הטפולוגיה המושרית מ τ. כלומר O פתוחה ב A מבחינה מטרית אמ"מ היא פתוחה מבחינה טופולוגית.
פתרון: עבור $a \in A$נסמן: $B^X(a,r) = \{x \in X | d(x,r) < r\}$, ו$B^A(a,r) = \{x \in A | d(x,a) < r\}$. נשים לב שלכל $a \in A$ מתקיים כי $B^A(a,r) = B^X(a,r) \cap A$.
כעת, תהי $O \subseteq X$ פתוחה. נראה ש$O \cap A$ פתוח בA. ובכן, תהי $a \in O \cap A$. מכיוון ש$a \in O$ וO קבוצה פתוחה בX, קיים $r > 0$ כך ש$B^X(a,r) \subseteq O$. מכאן: $B^A(a,r) = B^X(a,r) \cap A \subseteq O \cap A$. לכן $O \cap A$ פתוחה בA.
כיוון שני: נניח ש$U \subseteq A$ פתוחה בA. אזי U שווה לאיחוד של כדורים פתוחים בA. כלומר, $U = \bigcup B^A(a_i,r_i)$. נסמן $O = \bigcup B^X(a_i,r_i)$, זאת קבוצה פתוחה בX. כעת,

$$O \cap A = (\bigcup B^X(a_i,r_i)) \cap A = \bigcup (B^X(a_i,r_i) \cap A) = \bigcup B^A(a_i,r_i) = U$$

כלומר, U שווה לחיתוך של A עם קבוצה פתוחה בX.

3. תרגיל: יהא X מ"ט ו A תת מ"ט. הוכיחו כי S סגורה ב A אמ"ם קיימת קבוצה סגורה S' ב X כך ש $S = A \cap S'$.
פתרון: תהא S סגורה ב A אזי $A \backslash S$ פתוחה ב A. לכן קיימת O פתוחה ב X כך ש $A \backslash S = A \cap O$ נגדיר $S' = X \backslash O$ סגורה ב X והיא תקיים

$$A = A \cap X = A \cap (S' \uplus O) = (A \cap S') \uplus (A \cap O) = (A \cap S') \uplus (A \backslash S)$$

ולכן $S = A \cap S'$.

4. תרגיל: יהא X מ"ט ו A תת מ"ט. הוכיחו כי פונקצית ההכלה $f : A \to X$ רציפה. (תזכורת, פונקציית ההכלה $f : A \to X$ היא הפונקציה שמקיימת $f(a) = a$. זוהי לא פונקציית הזהות מכיוון שהתחום והטווח שלה אינם שווים.)
הוכחה: נשתמש בקריטריון השקול על כך שתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה. ובכן, תהא V פתוחה ב X. $f^{-1}[V] = V \cap A$ פתוחה ב A.

5. תרגיל: תהא $f: X \to Y$ פונקציה. הוכיחו כי $f: X \to Y$ רציפה אמ"מ $f: X \to Im(f)$ רציפה.

הוכחה: לכל $V \subseteq Y$ מתקיים כי $f^{-1}[V \cap Im(f)] = f^{-1}[V] \cap f^{-1}[Im(f)] = f^{-1}[V] \cap X = f^{-1}[V]$. ולכן

($\Leftarrow$) נניח ש$f: X \to Y$ רציפה. תהא V' פתוחה ב $Im(f)$. אזי $V' = V \cap Im(f)$ עבור קבוצה כלשהי V שפתוחה ב X. ואז $f^{-1}[V'] = f^{-1}[V]$ פתוחה ב X.

($\Rightarrow$) נניח ש$f: X \to Im(f)$ רציפה. תהא V פתוחה ב Y. אזי $f^{-1}[V \cap Im(f)] = f^{-1}[V]$ פתוחה ב X.

6. יהיו X וY מרחבים טופולוגיים, ו$\{O_i\}$ כיסוי פתוח של X. כלומר, הקבוצות O_i פתוחות, ו$X = \bigcup O_i$. נניח שיש פונקציות רציפות $f_i: O_i \to Y$ שמתלכדות על החיתוכים. כלומר, לכל i, j,

$$f_i|_{O_i \cap O_j} = f_j|_{O_i \cap O_j}$$

אז הן מגדירות פונקציה $f: X \to Y$ בדרך אחת. כלומר, לכל $x \in X$, קיים O_i כך ש$x \in O_i$. נגדיר $f(x) = f_i(x)$. נשים לב שזה מוגדר היטב. כלומר, אם בנוסף $x \in O_j$ אחר, אז $f_i(x) = f_j(x)$.

טענה: הפונקציה הנ"ל רציפה.

הוכחה: תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. לפי הגדרת f, $f^{-1}(U) = \bigcup f_i^{-1}(U)$. כעת, מכיוון שלכל i $f_i: O_i \to Y$ רציפה, אז $f_i^{-1}(U)$ פתוחה בO_i. שימו לב שזה לא מספיק, כי קבוצה שפתוחה בתת מרחב, לא בהכרח פתוחה במרחב כולו!). ניזכר שלהיות פתוחה בתת מרחב, זה אומר להיות חיתוך של התת מרחב, עם קבוצה פתוחה במרחב כולו. כלומר, לכל i קיימת V_i פתוחה בX כך ש: $f_i^{-1} = V_i \cap O_i$. כעת, מכיוון שכל O_i בעצמה פתוחה בX (לפי הנתון), נקבל ש$f_i^{-1}(U)$ פתוחה בX כחיתוך של שתי קבוצות פתוחות. לבסוף, $f^{-1}(U)$ פתוחה בX כאיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות.

7. תרגיל המשך: אותו דבר נכון גם עבור כיסוי סופי של Xע"י קבוצות סגורות. כלומרת אם $C_1, ..., C_n$ קבוצות סגורות בX, ויש $f_i: C_i \to Y$ פונקציות רציפות שמזדהות על החיתוכים, אז הפונקציה היחידה $f: X \to Y$ שהן מגדירות, רציפה.

הוכחה: נעזר בתנאי השקול לרציפות ע"י כך שתמונה הפוכה של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה.

תהי $A \subseteq Y$ קבוצה סגורה. $f^{-1}(A) = \bigcup f_i^{-1}(A)$. לכל i, $f_i^{-1}(A)$ סגורה בC_i. לכן קיימת קבוצה סגורה בX, B_i, כך ש$f_i^{-1}(A) = C_i \cap B_i$. כעת $f_i^{-1}(A)$ היא קבוצה סגורה בX כחיתוך של קבוצות סגורות. לבסוף, $f^{-1}(A)$ סגורה בX כאיחוד סופי של קבוצות סגורות.

תכונות הפרדה

1. הגדרה: מרחב טופולוגיה (X, τ) יקרא בעל תכונה הפרדה:

(א) T_0 אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1 \in U$ ו $x_2 \notin U$ או להיפך.

(ב) T_1 אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1 \in U$ ו $x_2 \notin U$. (שימו לב שזה אומר שקיימת גם V פתוחה כך ש$x_2 \in V$ ו$x_1 \notin V$)

(ג) T_2 (האוסדורף) אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימות U_1 וU_2 פתוחות כך ש $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ ו- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(ד) T_3 אם הוא T_1 ואפשר להפריד קבוצה סגורה ונקודה שאינה בקבוצה. כלומר לכל S סגורה ו $x\notin S$ קיימות קבוצות פתוחות זרות $x\in U_1, S\subseteq U_2$.

(ה) T_4 הוא T_2 ואפשר להפריד כל 2 קבוצות סגורות זרות. כלומר, לכל S_1,S_2 סגורות, קיימות U_1,U_2 קבוצות פתוחות וזרות כך ש $S_1\subseteq U_1, S_2\subseteq U_2$.

2. הערה: התכונות בסדר חוזק עולה. כלומר, כל מרחב שהוא T_i, הוא בהכרח גם T_{i-1}, וכן הלאה באינדוקציה.

3. דוגמאות:

(א) כל מ"מ הוא T_4 (ולכן כל T_i), למשל $\mathbb{R}$ למשל (X,disc).

(ב) $X=\{a,b\}$ שרפינסקי $\tau=\{\{a\},X,\emptyset\}$ הוא T_0 בלבד. (לa יש קבוצה פתוחה סביבו שלא מכילה את b, אבל לb אין קבוצה פתוחה סביבו שאינה מכילה את a).

(ג) $(X,\tau_{co-finite})$ כאשר X אינסופית. הוא T_1 אך לא T_2.
הסבר: יהיו $x_1,x_2\in X$. $U_2=\{x_1\}^c$ היא קבוצה פתוחה (כי המשלים שלה סופי) שמקיימת $x_2\in U, x_1\notin U$. כמו כן, $U_1=\{x_2\}^c$ היא קבוצה פתוחה שמקיימת $x_1\in U, x_2\notin U$.
היא לא T_2 כי אחרת, בפרט קיימות U_1,U_2 פתוחות זרות. נקבל $X=\emptyset^c=(U_1\cap U_2)^c=U_1^c\cup U_2^c$. סתירה, כי איחוד של קבוצות סופיות הוא קבוצה סופית.

(ד) $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$ עם $\tau=\{O:p\notin O\vee|O^c|\le\aleph_0\}$ הוא T_2 כי לכל $x_1\neq x_2$: בה"כ x_1 ממשי ואז $\{x_1\}^c,\{x_1\}$ יעשו את העבודה.

(ה) הוא גם T_3 כי: תהא S סגורה ו $x\notin S$ אם $x\neq p$ אזי $\{x\}^c,\{x\}$ פתוחות יפרידו ביניהם. אם $x=p$ אזי S גם פתוחה ו S^cפתוחה לפי הגדרה.

(ו) הוא T_4 כי יהיו S_1,S_2 סגורות זרות. אם p לא שייך לאף אחת אזי S_1,S_2 גם פתוחות. אחרת, בה"כ $p\in S_1$ ואז S_2 פתוחה ומהשלים שלה פתוח לפי הגדרה $S_1\subseteq S_2^c$.

4. תרגיל: כל מרחב טופולוגי סופי ו T_1 הוא דיסקרטי.
פתרון: מ"ל שכל הנקודונים פתוחים. אכן יהא x. ונסמן ב $x_1,\dots,x_n$ את שאר האיברים במרחב. מתכונת T_1 קיימות U_i כך ש $x\in U_i$ ו $x_i\in U_i^c$. טענה $\{x\}=\cap U_i$ הוכחה: $(\subseteq)$ ברור. $(\supseteq)$ כי $\{x_i\}\subseteq\cup U_i^c=(\cap U_i)^c$ ולכן $(\cap U_i)\subseteq\{x_i\}^c=\{x\}$.

5. בכל מרחב X שהוא T_2 מתקיים: לכל סדרה מתכנסת הגבול יחיד
פתרון: תהא $x_n\to x$ ונניח בשלילה גם $x_n\to x'$ כאשר $x\neq x'$. לפי תכונת T_2 קיימות U_1,U_2 פתוחות זרות כך ש $x\in U_1, x'\in U_2$ מהגדרת גבול קיימים N_1,N_2 כך ש

$$\forall n\ge N_1: x_n\in U_1$$
$$\forall n\ge N_2: x_n\in U_2$$

אם ניקח $N=\max\{N_1,N_2\}$ נקבל כי

$$\forall n\ge N: x_n\in U_1\cap U_2=\emptyset$$

6. תרגיל: האם ההפך הנכון? כלומר, אם לכל סדרה יש גבול יחיד, האם המרחב בהכרח T_2?
פתרון: לא, למשל X אינסופי לא בן מניה עם הטופולוגיה הקו-מניתית המוגדרת ע"י: $\tau=\{O:|O^c|\le\aleph_0\}\cup\{\emptyset\}$. מקיימת:

(א) היא לא T_2 כי עבור קבוצות פתוחות לא ריקות מתקיים כי הן לא זרות. אכן נניח בשלילה O_1, O_2 פתוחות לא ריקות המקיימות $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ ואז $X = O_1^c \cup O_2^c$ איחוד של שתי קבוצות בנות מניה. סתירה.

(ב) אם $x_n \to x$ אזי x_n קבועה על x לבסוף. כי אחרת בה"כ $x_n \neq x$ לכל n (אפשר לזרוק מהסדרה את כל האיברים ששווים לx, ולקבל תת סדרה איסופית שמתכנסת לx). ואז נגדיר $O = \{x_n\}^c$ סביבה של x שמקיימת לכל n $x_n \notin O$ סתירה.

7. תרגיל: X הוא T_1 אמ"מ כל נקודון סגור.

פתרון: $(\Rightarrow)$ נתון כי כל נקודות סגור. צ"ל X הוא T_1. יהיו $x_1 \neq x_2$ אזי $x_1 \in \{x_2\}^c$ פתוחה ש x_2 לא שייך אליה.

$(\Leftarrow)$ נתון X הוא T_1 . צ"ל כל נקודון סגור: יהא x נתון. אזי לכל $x \neq x'$ קיימת $O_{x'}$ פתוחה כך ש $x \notin O_{x'}$ וגם $x' \in O_{x'}$ ולכן $\cup_{x' \neq x} O_{x'} = X \backslash \{x\}$ פתוחה ולכן $\{x\}$ סגורה.