תרגיל בית 4 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

ריכוז מידה

תרגיל 1. הוכיחו את הגרסה הבאה של אי-שוויון צ'רנוף: יהיו $X_1,\dots,X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים המקבלים ערכים בקבוצה $\{0,1\}$. יהי $X=\sum_{i=1}^n X_i$, ותהי $\mu=\mathbb{E}[X]$ התוחלת של X. אזי לכל $\delta>0$,

$$P\left(X\geq(1+\delta)\mu\right)\leq\left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}.$$

הסיקו את החסם הפחות הדוק

$$P\left(X\geq(1+\delta)\mu\right)\leq e^{-\frac{\delta^2\mu}{2+\delta}}$$

לכל $\delta>0$. (בדומה אפשר להוכיח

$$P\left(X\leq(1-\delta)\mu\right)\leq\left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu}\leq e^{-\frac{\delta^2\mu}{2}},$$

אבל אתם לא חייבים להוכיח גם את זה.)

הדרכה לחסם הראשון:

א. הראו כי $M_X(t)\leq e^{(e^t-1)\mu}$.

ב. היעזרו ברעיון של אי-שוויון צ'רנוף (למצוא t מינימלי) כדי לקבל את החסם ההדוק יותר.

ג. קחו לוגריתם של החסם ההדוק, והיעזרו באי-השוויון $\ln(1+x)\geq\frac{x}{1+x/2}$ כדי להסיק את החסם הפחות הדוק.

תרגיל 2. יהי X משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2. נגדיר $r=\frac{\sigma}{\mu}$. בשאלה זו מטרתנו תהיה לבנות אומד טוב ל-μ באמצעות כמה שפחות דגימות בלתי-תלויות $X_1,\dots,X_n$ של X.

א. נגדיר את האומד $\hat{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. הראו כי לכל $\varepsilon,\delta>0$ מספיק לקחת $n=O\left(\frac{r^2}{\varepsilon^2\delta}\right)$ דגימות כדי שיתקיים

$$P\left(\left|\hat{X}-\mathbb{E}[X]\right|\geq\varepsilon\mathbb{E}[X]\right)\leq\delta.$$

ב. נאמר שאומד Y הוא **אומד חלש** אם $P\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq\varepsilon\mathbb{E}\left[X\right]\right)\leq\frac{1}{4}$. באמצעות סעיף א', מספיק לקחת $n=O\left(\frac{r^{2}}{\varepsilon^{2}}\right)$ דגימות כדי לקבל אומד חלש.

נניח שיש לנו m אומדים חלשים בלתי-תלויים $\hat{X}_{1},\ldots,\hat{X}_{m}$, ונגדיר את האומד החדש $\tilde{X}$ להיות החציון שלהם. הוכיחו כי באמצעות $m=O\left(\log\frac{1}{\delta}\right)$ אומדנים חלשים מקבלים אומד $\tilde{X}$ המקיים

$$P\left(\left|\tilde{X}-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq\varepsilon\mathbb{E}\left[X\right]\right)\leq\delta.$$

(הדרכה: לסעיף א', מספיק להשתמש בצ'בישב. לסעיף ב', הגדירו את משתנה האינדיקטור של האם האומד ה-i קרוב מספיק, והשתמשו בניסוח של צ'רנוף מהתרגיל הראשון.)

סוגי התכנסויות

תרגיל 3. הוכיחו (או היזכרו מתורת המידה) בגרירות שהזכרנו בתרגול: התכנסות כמעט תמיד $\Longleftarrow$ התכנסות בהסתברות $\Longleftarrow$ התכנסות בהתפלגות.

תרגיל 4. הוכיחו (או היזכרו מתורת המידה) כי אם $X_{n}\xrightarrow{P}X$, אז קיימת לה תת-סדרה $X_{n_{k}}\xrightarrow{\text{a.s.}}X$.

תרגיל 5. הוכיחו כי $\text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)\xrightarrow{\text{d}}\text{Poi}\left(\lambda\right)$.

בהצלחה!