<u>תזקורת.</u>

<u>הגדרה</u> יהי M מרחב מטרי. העתקה $f: M \to M$ נקראת *<u>העתקה מכווצת</u>* אם קיים מספר ממשי $0 \leq a < 1$ כך שלכל $x, y \in M$ מתקיים $d\big(f(x), f(y)\big) \leq a \cdot d(x, y)$.
(אנחנו נקרא a "מקדם כיווץ").

<u>הגדרה.</u> יהי M מרחב מטרי ו-$A \subseteq M$ תת-קבוצה במרחב.
אם A חסומה המספר $diam(A) \coloneqq \sup\limits_{x,y\in A} d(x, y)$
נקרא *<u>קוטר של תת-קבוצה</u>* A. (הוא קיים כחסם עליון של קבוצה חסומה מלעיל ב-$\mathbb{R}$).
אם A איננה חסומה אז בהגדרה: $diam(A) := \infty$.

1. <u>עקרון העתקות המכווצות.</u>

<u>משפט.</u> יהי M מרחב מטרי קומפקטי ותהא $f: M \to M$ העתקה מכווצת. אזי קיימת *נקודת שבת* של f , כלומר, קיימת $x^* \in M$ כך ש- $f(x^*) = x^*$.

<u>הוכיחו</u> את המשפט על נקודת שבת בשלבים:

נסמן $F_0 = M$ ו- $F_n = f(F_{n-1})$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

<u>א'</u> הוכיחו ש- $F_n \subseteq F_{n-1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

<u>ב'</u> הוכיחו ש- F_n סגורה לכל $n \in \mathbb{N}$.

<u>ג'</u> הוכיחו ש- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

<u>ד'</u> הוכיחו ש- $diam(F_n) \leq a \cdot diam(F_{n-1})$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
(כאשר a "מקדם כיווץ")

<u>ה'</u> הוכיחו ש- $\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$

<u>ו'</u> הוכיחו שקיימת נקודה $x^* \in M$ כך ש- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x^*\}$

ז' הוכיחו ש- $f(x^*) = x^*$.

2. (קומפקטיפיקציה.) יהי $X = \mathbb{R}^n \cup \{p\}$ כהשר $p \notin \mathbb{R}^n$.
נגדיר אוסף τ של תת-קבוצות ב-X:
$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid U \text{ is open in } \mathbb{R}^n\} \cup \{ V \subseteq X \mid p \in V \wedge X - V \text{ is compact in } \mathbb{R}^n\}$$
<u>א'</u> הוכיחו ש- τ טופולוגיה.
<u>ב'</u> הוכיחו ש- (X, τ) מרחב טופולוגי קומפרטי.

3. להראת שטופולוגיה חזקה מטופולוגית האוסדורף היא גם טופולוגית האוסדורף.

4. להראת שבמרחב האוסדורף טופולוגיה המושרת לכל תת-מרחב סופי היא טופולוגיה דיסקרטית.

5. להראת שבמרחב האוסדורף לסדרה לא יכול להיות יותר מגבול אחד.

6. הוכיחו שמ"ט X הוא מרחב האוסדורף א"א לכל $x \in X$ מתקיים:
$$\bigcap_{\substack{F \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F = \{x\}$$

7. יהיה X מ"ט .הוכיחו שאמ לכל $x \neq y \in X$ קיים מרחב האוסדורף Y ופונקציה רציפה f כך ש- $f(x) \neq f(y)$, אזי X מרחב האוסדורף.
8. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, Y - מרחה האוסדורף ו- $f, g: X \to Y$ שתי פונקציות רציפות. הוכיחו שתת-קבוצה $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ סגורה.