מועד א' תשע"ז - אלגברה לינארית

חלק א'

① הוכחות-

②

חלק ב'

③ נדרג את A:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\\-1&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

(i) 2 השורות הראשונות לא התאפסו ולכן:

$$\boxed{\begin{matrix}R(A)=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\\ \dim R(A)=2\end{matrix}}$$

ב-2 העמודות הראשונות יש איברים מובילים ולכן

$$\boxed{\begin{matrix}C(A)=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}\\ \dim C(A)=2\end{matrix}}$$

(ii) הדרך הכי בטוחה היא להוסיף ל- $R(A)$ את וקטורי הבסיס הסטנדרטי ולדרג:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&0&0&-1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

ב-4 העמודות הראשונות יש איברים מובילים ולכן הבסיס המבוקש הוא:

$$\boxed{B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}$$

(iii) מטריצה כזאת למשל היא: $B=I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

ל- I יש פתרון לכל $\vec{b}$, בפרט ל- $\vec{b}$ שפותרים את $A\vec{x}=\vec{b}$, אולם קיימים $\vec{b}$ כך של- $A\vec{x}=\vec{b}$ אין פתרון ולהם כמובן קיים פתרון למע' $B\vec{x}=\vec{b}$.

ב. (i) נמצא: $Ker(T)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\vec{x}=0\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\\1&2&1&1&0\\-1&0&1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{מסעיף א'}]{}\cdots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}t-s\\-t\\t\\s\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{ker(T)=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}$$

$$\begin{array}{cccc}&&\uparrow&\uparrow\\&&t&s\end{array}$$

$(\dim ker(T)=2)$

3 ב. (i) תמונה

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\\-1&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}a+b+d\\b+c\\a+2b+c+d\\-a+c+d\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$$ $Im(T)$ הוא המרחב הנפרש ע"י עמודות A

לכן:
$$\boxed{\begin{aligned}&Im(T) = C(A) = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\\ &\dim Im(T) = 2\end{aligned}}$$

(ii) T חח"ע $\Leftrightarrow$ $\dim\ker(T) = 0$.

לכן T לא חח"ע

T על $\Leftrightarrow$ $Im(T) = W$

המימד של T קטן מ- 4, שהוא $\dim \mathbb{R}^4$, לכן T לא על.

4 א. נמצא ע"ע של A:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\1&\lambda-1&1\\-1&1&\lambda-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda&\lambda&0\\1&\lambda-1&1\\0&\lambda&\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2\begin{vmatrix}1&1&0\\1&\lambda-1&1\\0&1&1\end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2\left[1\cdot(\lambda-1-1) - 1\cdot(1-0)\right] = \underline{\underline{\lambda^2(\lambda-3)}}$$

$$V_{\lambda=0}: \left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&0\end{array}\right) \to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\\ \begin{array}{cccc}&\uparrow&\uparrow&\\ &t&s&\end{array}\end{array} \Rightarrow \vec{V} = \begin{pmatrix}t-s\\t\\s\end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda=0} = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{\lambda=3}: \left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&0\\1&2&1&0\\-1&1&2&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-3&-3&0\\0&3&3&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\\ \begin{array}{cccc}&&\uparrow&\\ & &t&\end{array}\end{array}$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix}t\\-t\\t\end{pmatrix} \Rightarrow V_{\lambda=3} = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

4) א. נבצע גרם-שמידט ונרמול:

$V_{\lambda=0}: \quad \vec{u}_1 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ (*) לצורך נוחות!

לאחר נרמול:

$\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \; ; \; \vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \; ; \; \vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

לכן:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}}$$

ב. A לא הפיכה משום ש- $\lambda=0$ הוא ע״ע שלה. לפי משפט השקילים:

$\lambda=0$ לא ע״ע של A $\iff$ A הפיכה

דרך טובה למצוא B כזאת היא בעזרת הנוסחה:

$A\cdot adj(A) = |A|\cdot I \quad (=0)$.

אולם $adj(A) = O_{3\times3}$.

לכן נפתור באופן פרמטרי עבור שורה אחת של A (כל השאר ייתנו פתרון זהה מכיוון שהן ת״ל):

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0$$

$a - \underset{\downarrow\atop 1}{b} + \underset{\downarrow\atop 1}{c} = 0 \Rightarrow a = 0$

לכן:

$$\boxed{B = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}}$$

ג. המרחב הניצב ל- $C(A)$ הוא $M(A)$, ובמקרה שלנו $V_{\lambda=0}$:

$$\boxed{C(A)^{\perp} = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}$$

5 א. <u>הוכחה:</u>

ניתן לדרג את שורות B ע"י דירוג של A ב-2 ה"קומות" במקביל.
מכיוון שהצורה הקנונית היא יחידה, נקבל את אותן שורות בחלק העליון והתחתון.
לאחר מכן נאפס כל שורה ב"קומה התחתונה" באמצעות השורה הצמודה לה ב"קומה העליונה" ונקבל: $R(A)=R(B)$
ולכן: $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

ב. <u>הפרכה:</u>

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}(A)=1$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{rank}(C)=2$$

ג. <u>הוכחה:</u>
אותה דוגמה של סעיף ב'!

ד. <u>הפרכה:</u>

- עבור $r(A)=2/3$, $2r(A)=4/6$ וזה לא יתכן כי הדרגה של מטריצה לא יכולה להיות גדולה ממספר השורות או העמודות שלה.
- עבור $r(A)=0$ נקבל את מטריצת האפס ולכן גם $r(C)=0$
- עבור $r(A)=1$ בעצם מדובר בשורה אחת בת"ל.

נדרג את C לפי "קומות". מה"קומה העליונה" כמובן תישאר שורה אחת וגם מה"קומה התחתונה" תישאר שורה אחת. מכיוון ש- $R(A^t)=C(A)$
$\dim(C(A))=\dim R(A)=r(A)$
לכן נשאר לכל היותר עם 2 שורות בת"ל ולכן $\dim R(C)=r(C)\le 2$

6 א. $P_{\alpha A}(x)=|xI-\alpha A|=\left|\alpha\left(\frac{x}{\alpha}I-A\right)\right|=\alpha^n\left|\frac{x}{\alpha}I-A\right|=\boxed{\alpha^n p_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)}$

ב. נשתמש בסעיף א':

$P_{cA}(x)=c^n p_A\left(\frac{x}{c}\right)$

נתון ש: $P^{-1}AP=cA$
לכן A ו- cA דומות ולכן יש להן את אותו פ"א

המשך

6 ב.

$$p_{cA}(x) = p_A(x)$$

$$c^n p_A\left(\frac{x}{c}\right) = p_A(x)$$

$$c^n\left(\left(\frac{x}{c}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{x}{c}\right)^{n-1} + \dots + a_1\cdot\left(\frac{x}{c}\right) + a_0\right) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

$$\cancel{x^n} + c\cdot a_{n-1}x^{n-1} + \dots + c^{n-1}a_1x + c^n a_0 = \cancel{x^n} + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

$$(c-1)a_{n-1}x^{n-1} + (c^2-1)a_{n-2}x^{n-2} + \dots + (c^{n-1}-1)a_1x + (c^n-1)a_0 = 0$$

לכן, לכל i מתקיים: $(c^i-1)a_{n-i}=0$

כלומר: או $a_{n-i}=0$ או c^i-1.

לא קיים i כך ש: $c^i-1=0$

לכן לכל $1 \le i \le n$ מתקיים:

$$a_{n-i}=0$$

$$\Downarrow$$

$$p_A(x) = x^n$$

לפי משפט קיילי - המילטון:

$$\boxed{p_A(A) = A^n = 0}$$

קיים i כך ש:

$$c^i - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{כלומר קיים } k \text{ כך ש: } c^k = 1}$$

ז

$$A^n = 0$$

$$A\cdot A^{n-1} = 0$$

$$\Downarrow$$

A מחלק אפס

$$\Downarrow$$

A לא הפיכה