פתרון מבחן מועד ב' - חדו"א 1 לאודיסאה – 10/02/22

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)+x}{\ln(1+x^x)\ln(1+x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \frac{1}{\ln(1+x^x)} \cdot \frac{\sin(x)+x}{x} = 1 \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2 = \frac{2}{\ln(2)}$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \left\{0^0, \text{אילן}\right\} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1$$

כאשר

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \{0\cdot(-\infty)\} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{-\infty}{\infty}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

וכן

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)+x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x} + 1\right) = 1 + 1 = 2$$

ב. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - x\ln(x)}{x} = \left\{\frac{1}{0^+}\right\} = \infty$$

ג. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

ננסה להשתמש בכלל המנה

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(2(n+1)\right)!}{\left((n+1)!\right)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot n\left(2+\frac{2}{n}\right)}{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2} = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}} \to 4$$

כיוון שגבול המנה של הסדרה החיובית גדול מ1, נובע כי הסדרה שואפת לאינסוף.

.2

א. חשבו את $\int \frac{x^7}{x^2+2x+2}dx$

דרגת המונה גדולה או שווה לדרגת המכנה ולכן נבצע חילוק פולינומים

ונקבל כי

$$\frac{x^7}{x^2+2x+2} = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x + 8 - \frac{8(x+2)}{x^2+2x+2}$$

כיוון שגורם במכנה אי פריק, והמונה לינארי, מדובר בשבר חלקי.

כעת נחשב את

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$$

כעת

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \arctan(x+1)$$

תזכורת

$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

כיוון ש

$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+a}{b}\right)^2+1}dx = \left\{\begin{matrix} t = \frac{x+a}{b} \\ dt = \frac{1}{b}dx \\ bdt = dx \end{matrix}\right\} = \frac{b}{b^2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{b}\arctan(t) = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

סה"כ התשובה היא

$$\int \frac{x^7}{x^2+2x+2}dx = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 8x - 4\ln(x^2+2x+2) - 8\arctan(x+1) + C$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_1^\infty \frac{1}{x+2^x}dx$

הפעם על מנת להיות מקוריים לא נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי (למרות שהוא יעבוד).

$$\frac{1}{x+2^x} < \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

$$\int_1^\infty 2^{-x}dx = \left[\frac{-2^{-x}}{\ln(2)}\right]_1^\infty = \left\{-\frac{2^{-\infty}}{\ln(2)} - \left(-\frac{2}{\ln(2)}\right)\right\} = \frac{2}{\ln(2)}$$

האינטגרל הגדול יותר מתכנס, ולכן בוודאי הקטן.

תזכורת

$$(a^x)' = a^x \ln(a)$$

הערה: נניח אנחנו במבחן ושכחנו איך לגזור את זה.

$$2^{-x} = e^{\ln(2^{-x})} = e^{-\ln(2)x}$$

ואת זה אנחנו יודעים לגזור.

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x = \frac{1}{x}$

דרך ראשונה עם "טריק"

לכל $x \neq 0$ המשוואה שקולה למשוואה $xe^x = 1$, אז נחקור אותה במקום.

$$h(x) = xe^x - 1$$

$$h'(x) = (x+1)e^x$$

כאשר $x < -1$ הנגזרת שלילית, וכאשר $x > -1$ הנגזרת חיובית

ולכן הפונקציה h יורדת בתחום $(-\infty, -1]$ ועולה בתחום $[-1, \infty)$

כעת $h(-1) = -e^{-1} - 1 < 0$

קיבלנו שהמינימום הגלובאלי שלילי.

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} xe^x - 1 = \infty$$

יש לנו נקודה מתחת לציר ומעל הציר בקטע $[-1, \infty)$ וכיוון שהפונקציה רציפה כצירוף אלמנטריות לפיה ערך הביניים יש לה שם חיתוך עם הציר.

מה ניתן להסיק עד כה לגבי המשוואה בשאלה $e^x = \frac{1}{x}$?

אם החיתוך היה באפס היינו מפספסים אותו, אבל $h(0) = -1 \neq 0$ כלומר החיתוך הוא בנקודה אחרת.

עד כה, מצאנו פתרון אחד למשוואה.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x - 1 = -1$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \{-\infty\cdot 0\} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left\{\frac{-\infty}{\infty}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \left\{\frac{1}{-\infty}\right\} = 0$$

לכן הפונקציה בתחום $(-\infty,-1]$ לעולם אינה חותכת את הציר, כיוון שהיא מונוטונית יורדת והגבול משמאל הוא מינוס 1.

הערה: בתחום זה קל מאד לראות בלי שום קשר שאין חיתוך כיוון

$$xe^x - 1 < -1, \quad x < 0$$

סה"כ למשוואה יש פתרון יחיד.

דרך שנייה לפתרון:

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$$

הנגזרת חיובית בכל הממשיים בתחום הגדרתה, ולכן תחומי העלייה של הפונקציה הם

$$(-\infty,0),(0,\infty)$$

נחשב את הגבולות בקצות הקטעים

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - \frac{1}{x} = 0$$

לכן אין חיתוך בתחום $(-\infty,0)$

כעת

$$\lim_{x\to0^+} e^x - \frac{1}{x} = \left\{1 - \frac{1}{0^+}\right\} = -\infty$$

לכן יש בתחום $(0,\infty)$ נקודה מתחת לציר

$$\lim_{x\to\infty} e^x - \frac{1}{x} = \{\infty - 0\} = \infty$$

ולכן יש נקודה מעל הציר בתחום.

הפונקציה רציפה בין שתי הנקודות כצירוף של אלמנטריות בתחום הגדרתן.

ולפי ערך הביניים יש חיתוך, כיוון שמדובר בתחום עלייה יש לא יותר מאשר חיתוך אחד בו, וסה"כ יש חיתוך יחיד.

ב.   מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x = \ln(x)$

דרך ראשונה:

שימו לב – תחום ההגדרה הוא רק החיוביים.

$$h(x) = e^x - \ln(x)$$

$$h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

בחיוביים אנחנו יודעים שהפונקציה הזו (הנגזרת) עולה, ויש לה חיתוך יחיד עם ציר האיקס, נסמנו בc

לכן h' שלילית בתחום $(0, c)$ וחיובית בתחום (c, ∞)

ולכן h יורדת עד c ועולה אחריו, לכן יש לה מינימום גלובאלי

$$h(c)$$

נשים לב כי

$$h'(1) = e^1 - 1 > 0$$

לכן בהתאם לסעיף א', הנקודה c בה הנגזרת מתאפסת היא בתחום $(0,1)$ כלומר $0 < c < 1$

ולכן

$$h(c) = e^c - \ln(c) > 0$$

כי

$$\ln(c) < 0$$

כלומר המינימום הגלובאלי חיובי, ולכן לפונקציה אין נקודות חיתוך עם הציר כלל, ולמשוואה אין פתרון.

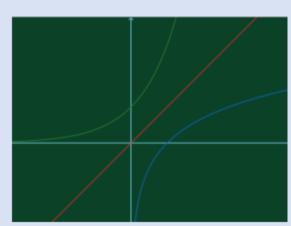
דרך שנייה (עם טריק):

נוכיח שתי טענות:

$$e^x > x$$

$$x > \ln(x)$$

מכאן נובע שאין למשוואה חיתוך.



נוכיח את המשוואה העליונה

$$f(x) = e^x - x$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

הנגזרת שלילית בשליליים וחיובית בחיוביים ולכן באפס לפונקציה יש מינימום גלובאלי שהוא

$$f(0) = 1$$

לכן לכל x

$$f(x) \geq 1$$

$$e^x - x \geq 1$$

$$e^x \geq x + 1 > x$$

לבסוף נפתח את אי השיוויון

$$x > \ln(x)$$

נחשב את האקספוננט של כל אחד מן הצדדים, ונקבל אי שיוויון שקול

$$e^x > e^{\ln(x)} = x$$

וזה אי השיוויון שכבר הוכחנו.

4. תהי פונקציה f הגזירה בכל הממשיים כך שלנגזרת f' מספר סופי של שורשים (חיתוכים עם ציר האיקס).
   א. הוכיחו כי קיים M כך שלכל $x > M$ מתקיים כי $f(x) \neq 0$.

נב"ש כי אין M כזה, נובע כי f חותכת את הציר אינסוף פעמים.

לפי רול, בין כל שתי נקודות בהן f נוגעת בציר, הנגזרת מתאפסת.

ולכן לנגזרת יש אינסוף שורשים, בסתירה.

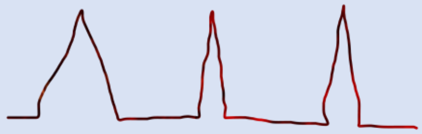
   ב. הוכיחו/הפריכו: אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ אזי $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

הפרכה:

אנחנו רוצים למצוא פונקציה עבורה ל$f'(x)$ אין גבול אבל גם שהנגזרת אינה חותכת את ציר האיקס, וכן $f(x)$ שואפת לאפס.

נתחיל מהנגזרת, ומה היא f ביחס לנגזרת? היא האינטגרל והיא מודדת את השטח.

ראשית נביט בפונקציה g שרוב הזמן היא אפס, וסביב כל מספר שלם, היא משולש שעולה לגובה 1 ששטחו הוא $\frac{1}{2^n}$



האינטגרל של הפונקציה הזו $\int_0^x g(t)dt$ שואף להיות 1 שזה הסכום של כל השטחים.

$$f'(x) = g(x) + e^{-x} > 0$$

$$f(x) = \int_0^x (g(t) + e^{-t})dt - C$$

כעת,

$$f'(n) = 1 + \frac{1}{e^n} \to 1$$

ולכן אכן f' אינה שואפת לאפס (אפשר גם להסיק שאין לה גבול בכלל אם ניקח סדרה עליה הגובה הוא אפס).

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_0^\infty (g(t) + e^{-t})dt - C$$

כאשר

$$\int_0^\infty g(t)dt = 1$$

$$\int_0^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$

נבחר $C = 2$ ולכן אכן $f(x) \to 0$ כפי שרצינו.

5. תהי סדרה המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_{n+1} = \frac{2a_n^2+1}{a_n+2}$ וכן נתון כי $a_1 = \frac{1}{2}$.

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

צ"ל כי לכל n מתקיים כי

$$a_{n+1} - a_n \geq 0$$

כעת

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n^2 + 1}{a_n + 2} - a_n = \frac{2a_n^2 - a_n^2 - 2a_n + 1}{a_n + 2} = \frac{a_n^2 - 2a_n + 1}{a_n + 2} = \frac{(a_n - 1)^2}{a_n + 2}$$

מספיק להראות שהמכנה חיובי, ולכן מספיק להראות כי $a_n \geq 0$ אך זו אינדוקציה קלילה:

אכן, $a_1 = \frac{1}{2} > 0$ ויהי n עבורו $a_n > 0$ לכן $a_{n+1} = \frac{2a_n^2+1}{a_n+2} > 0$.

ב. חשבו את גבול הסדרה.

הוכחנו כי הסדרה מונוטונית עולה, לכן או שהיא חסומה ומתכנסת לגבול סופי או שהיא שואפת לאינסוף.

<u>אם</u> הסדרה חסומה, אז היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{2a_n^2 + 1}{a_n + 2}$$

$$L = \frac{2L^2 + 1}{L + 2}$$

$$L^2 + 2L = 2L^2 + 1$$

$$L^2 - 2L + 1 = 0$$

$$(L - 1)^2 = 0$$

$$L = 1$$

שימו לב – לא סיימנו!!!

נוכיח שאכן הסדרה חסומה ולכן מתכנסת לגבול סופי ואז נסיק שהגבול הזה הוא אחד.

נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_n < 1$ באמצעות אינדוקציה

בדיקה $a_1 = \frac{1}{2} < 1$

יהי n עבורו $a_n < 1$ צ"ל כי $a_{n+1} < 1$

צ"ל

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{a_n + 2} < 1$$

צ"ל כי

$$2a_n^2 + 1 < a_n + 2$$

$$2a_n^2 - a_n - 1 < 0$$

שורשי הפרבולה הם

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = 1, -\frac{1}{2}$$

ואכן $0 < a_n < 1$ כלומר בתחום בו הפרבולה מתחת לציר וסיימנו.

.6

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 e^{\frac{k}{n}}}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot e^{-\frac{k}{n}}$$

לכן מדובר בסכומי רימן של הפונקציה xe^{-x} הרציפה בקטע $[0,1]$, עם הנקודות $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$

ולכן סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל

$$a_n \to \int_0^1 xe^{-x} dx$$

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = \begin{Bmatrix} f' = e^{-x} & g = x \\ f = -e^{-x} & g' = 1 \end{Bmatrix} = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} - (0 - 1) = 1 - \frac{2}{e}$$

ב. קרבו את $\ln(2) - \ln(3)$ עד שגיאה של $h = \frac{1}{100}$

ראשית נשים לב כי

$$\ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

נקרב את $f(x) = \ln(x)$ בנק' הרצוייה $\frac{2}{3}$ סביב הנק' המצוייה 1 עד כדי $h = \frac{1}{100}$

$$f = \ln(x)$$
$$f' = \frac{1}{x}$$
$$f'' = -x^{-2}$$
$$f''' = 2x^{-3}$$
$$f'''' = -6x^{-4}$$

ובאופן כללי ניתן להוכיח באינדוקציה כי לכל $n \geq 1$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}$$

השגיאה בקירוב בפיתוח עד n היא

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{2}{3}-1\right)^{n+1}$$

כאשר $\frac{2}{3} < c < 1$

$$|R_n| = \frac{n!}{c^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{c^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \underbrace{\leq}_{\text{נקטין את המכנה}} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

כבר עבור $n = 4$ נקבל שהשגיאה קטנה מ

$$\frac{1}{5\cdot 2^5} = \frac{1}{5\cdot 32} < \frac{1}{5\cdot 20} = \frac{1}{100}$$

ולכן הקירוב הוא:

$$P_4 = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4$$

ולכן

$$\ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -\frac{1}{3} - \frac{1}{2!\cdot 3^2} - \frac{2}{3!\ \cdot 3^3} - \frac{6}{4!\cdot 3^4}$$