תרגיל 1 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. חשבו את הגבולות הבאים. פרטו את כל שלבי החישוב.

1.1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+1}{2n-3n^3+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^3}+\frac{5n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{2n}{n^3}-\frac{3n^3}{n^3}+\frac{4}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}^{\to 0}+\overbrace{\left(\frac{5}{n^2}\right)}^{\to 0}+\overbrace{\left(\frac{1}{n^3}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{\left(\frac{2}{n^2}\right)}_{\to 0}-3+\underbrace{\left(\frac{4}{n^3}\right)}_{\to 0}}=\frac{0}{-3}=0$$

1.2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^6+2n^8+111}+n}{\sqrt[4]{5n^2+n^3+13n^{16}+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{4n^6+2n^8+111}}{n^4}+\frac{n}{n^4}}{\frac{\sqrt[4]{5n^2+n^3+13n^{16}+3}}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{4n^6}{n^8}+\frac{2n^8}{n^8}+\frac{111}{n^8}}+\frac{n}{n^4}}{\sqrt[4]{\frac{5n^2}{n^{16}}+\frac{n^3}{n^{16}}+\frac{13n^{16}}{n^{16}}+\frac{3}{n^{16}}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{4}{n^2}\right)}_{\to 0}+2+\underbrace{\left(\frac{111}{n^8}\right)}_{\to 0}}+\underbrace{\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\to 0}}{\sqrt[4]{\underbrace{\left(\frac{5}{n^{14}}\right)}_{\to 0}+\underbrace{\left(\frac{1}{n^{13}}\right)}_{\to 0}+13+\underbrace{\left(\frac{3}{n^{16}}\right)}_{\to 0}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{13}}=\sqrt[4]{\frac{4}{13}}$$

1.3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n-5}{7-5n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3}+\frac{3n}{n^3}-\frac{5}{n^3}}{\frac{7}{n^3}-\frac{5n^2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{\frac{7}{n^3}-\frac{5}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{\frac{7}{n^3}-\frac{5}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{\frac{1}{n}\left(\frac{7}{n^2}-5\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\overbrace{\left(\frac{3}{n^2}\right)}^{\to 0}-\overbrace{\left(\frac{5}{n^3}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}\underbrace{\left(\frac{7}{n^2}-5\right)}_{\to -5}}=\text{"}\frac{2}{0^-}\text{"}-\infty$$

1.4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n-6}{8n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^3}{n^3}+\frac{n}{n^3}-\frac{6}{n^3}}{\frac{8n}{n^3}+\frac{n^2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\overbrace{\left(\frac{1}{n^2}\right)}^{\to 0}-\overbrace{\left(\frac{6}{n^3}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{8}{n^2}+\frac{1}{n}}_{\to 0^+}}=\text{"}\frac{4}{0^+}\text{"}=\infty$$

2. חשבו את הגבולות הבאים, או הראו כי הם אינם קיימים:
הערה: גם מי שלא ראה זאת בתרגול יכול להשתמש במשפט לפיו סדרה חסומה כפול סדרה השואפת לאפס, שואפת לאפס.

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{\sin\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}}}_{\to 0}=0$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\left((\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right)=$$

2.2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\underbrace{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}_{\to\infty}}\right)=0$$

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\underbrace{2^{\frac{n^3+1}{\underbrace{n-2}_{\to\infty}}}}_{\to\infty}}+\underbrace{\sin\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}}_{\to 0}\right)=\text{"}\infty+0\text{"}=\infty$

2.4.

$$\lim_{n\to\infty}(5n-\sqrt{25n^2+6n-8})=\lim_{n\to\infty}\left((5n-\sqrt{25n^2+6n-8})\frac{5n+\sqrt{25n^2+6n-8}}{5n+\sqrt{25n^2+6n-8}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{25n^2-(25n^2+6n-8)}{5n+\sqrt{25n^2+6n-8}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-6n+8}{5n+\sqrt{25n^2+6n-8}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\frac{6n}{n}+\frac{8}{n}}{\frac{5n}{n}+\frac{\sqrt{25n^2+6n-8}}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-6+\frac{8}{n}}{5+\sqrt{\frac{25n^2}{n^2}+\frac{6n}{n^2}-\frac{8}{n^2}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-6+\overbrace{\left(\frac{8}{n}\right)}^{\to 0}}{5+\sqrt{25+\underbrace{\left(\frac{6}{n}\right)}_{\to 0}-\underbrace{\left(\frac{8}{n^2}\right)}_{\to 0}}}\right)=\frac{-6}{5+\sqrt{25}}=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}$$

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n)+\cos(n-1)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(n)+\cos(n-1))\frac{1}{n}$

נשים לב: $\sin(n),\cos(n-1)$ סדרות חסומות לכן, גם סכומם, סדרה חסומה.

כמו כן, הסדרה $\frac{1}{n}$ שואפת לאפס. לכן, הגבול הנ"ל שווה לאפס, בתור הגבול של סדרה חסומה כפול סדרה השואפת לאפס.

כלומר: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n)+\cos(n-1)}{n}=0$

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{3\cdot 4^n}{5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3(-1)^n\left(\frac{4}{5}\right)^n$

נשים לב: $(-1)^n$ סדרה חסומה לכן, גם $3(-1)^n$, סדרה חסומה כסדרה חסומה כפול סדרה קבועה (ובפרט חסומה).

כמו כן, הסדרה $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ שואפת לאפס. לכן, הגבול הנ"ל שווה לאפס, בתור הגבול של סדרה חסומה כפול סדרה השואפת לאפס.

כלומר: $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{3\cdot 4^n}{5^n}=0$

2.7. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+\frac{1}{3}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}{\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}-\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{4}\right)^n-\frac{1}{4}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}\overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\to 0}}{\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{-\frac{1}{4}}=-4$$

2.8. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}+3^{n+1}}{4^n-2^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3\cdot 3^n}{4^n-4\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^n}{4^n}+3\cdot\frac{3^n}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n}-4\cdot\frac{2^n}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\cdot\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{\to 0}}{1-4\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0}}=\frac{1}{1}=1$$

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n+(-3)^n\right)$

נשים לב:

$$3^n+(-3)^n=\begin{cases}3^n+3^n & n-even\\ 3^n-3^n & n-odd\end{cases}=\begin{cases}2\cdot 3^n & n-even\\ 0 & n-odd\end{cases}$$

תת הסדרה במקומות הזוגיים שואפת לאינסוף בעוד שתת הסדרה במקומות האי זוגיים היא אפס באופן תמידי (ולכן שואפת לאפס). לכן, לסדרה עצמה אין גבול. כלומר, הסדרה מתבדרת.

2.10. $$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{2n+3}{3n-5}\right)}_{\to\frac{2}{3}}^{\overbrace{n}^{\to\infty}} = "\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}" = 0$$

2.11. $$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{5n-\sqrt{n}}{4n+3}\right)}_{\to\frac{5}{4}}^{n^2} = "\left(\frac{5}{4}\right)^{\infty}" = \infty$$

2.12. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+5}{n-2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n-2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n-2}\right)^{n\frac{n-2}{n-2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{5}{n-2}\right)^{n-2}}_{e^5}\right)^{\overbrace{\left(\frac{n}{n-2}\right)}^{\to 1}} = \left(e^5\right)^1 = e^5$$

2.13. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+4}\right)^{n^4} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+4-5}{n^3+4}\right)^{n^4} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{n^3+4}\right)^{n^4\frac{n^3+4}{n^3+4}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{-5}{n^3+4}\right)^{n^3+4}}_{e^{-5}}\right)^{\overbrace{\frac{n^4}{n^3+4}}^{\to\infty}} = "\left(\frac{1}{e^5}\right)^{\infty}" = 0$$

2.14. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}2\underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\right)}_{\to 1} = 2$$

בהצלחה! ☺