תרגול 10-אושרית

מטריצות מיוחדות ואופרטורים מיוחדים

קצת הגדרות:

הגדרה. תהי A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$, אז המטריצה הצמודה ל-A היא $A^* = \bar{A}^t$

הערה. מתקיים $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$

מתכונת ההעתקה הצמודה שראינו
תרגול שעבר

הגדרה.

1. מטריצה ריבועית A נקראת צמודה לעצמה אם $A = A^*$ נשים לב שמעל $\mathbb{R}$ זה שקול למטריצה סימטרית ועל $\mathbb{C}$ היא נקראת הרמיטית
2. מטריצה נורמלית היא מטריצה המקיימת $AA^* = A^*A$
3. מטריצה מרוכבת המקיימת $A^* = A^{-1}$ (כלומר $AA^* = A^*A = I$) נקראת מטריצה אוניטרית.
4. מטריצה ממשית המקיימת $A^t = A^{-1}$ (כלומר $AA^t = A^tA = I$) נקראת מטריצה אורתוגונלית.

בעולם ההעתקות הלינאריות

אופרטורים מיוחדים:

נורמלי: $T^*T = TT^*$ (צ"א אופרטור T נקרא נורמלי אם הוא מקיים הנ"ל)

אוניטרי: $T^* = T^{-1}$ (בפרט T הפיכה) צ"א $T^*T = I$

[-♡- T אוניטרי $\Leftarrow$ T נורמלי כי: $T^*T = T^{-1}T = I = TT^*$]

צמ"ע (צמוד לעצמו): $T^* = T$

[-♡- גם הוא נורמלי כי: $T^*T = TT = TT^*$]

אנטי סימטרי: $T^* = -T$

[-♡- גם הוא נורמלי]

הוכחה:

$$T^*T = -T\cdot T = T\cdot(-T) = TT^*$$

תרגיל. עבור אילו ערכי $a,b \in \mathbb{C}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix}$ היא הרמיטית?

פתרון. מטריצה הרמיטית מקיימת $A = A^* = \overline{A^t}$ ולכן צריך להתקיים

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} a & 0 & i \\ 0 & 2a & 1 \\ b & a & a \end{pmatrix}}$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{a} = 1, b = \overline{i}$$
$$\Downarrow$$
$$a = 1, b = -i$$

תרגיל:

תהי A מטריצה אוניטרית. הוכיחו כי כל הערכים העצמיים של A הם מאורך 1.

פתרון: יהי z ע"ע של A. אזי קיים וקטור $0 \neq v$ כך ש $Av = zv$.

לכן

כפל טרנספוזאז

הגדרת מ"פ סטנדרטית

$$z\bar{z} < v, v > = < zv, zv > = < Av, Av > = (Av)^t \overline{Av} = v^t A^t \overline{Av} = v^t \overline{\overline{A^t}} A\bar{v} = v^t \overline{A^*} A\bar{v}$$

לינאריות רכיב ראשון וסמי לינאריות רכיב שני

הגדרת עע

כעת, כיוון ש A אוניטרית מתקיים $A^* A = I$ ולכן ביחד אנו מקבלים:

$$z\bar{z} < v, v > = v^t \bar{v} = < v, v >$$

הגדרת מ"פ סטנדרטית

כיוון שהוקטור שונה מאפס, ניתן לחלק ב $< v, v >$ על מנת לקבל

$$|z|^2 = z\bar{z} = 1$$

שאלה: מה ניתן לומר על הע"ע של T, T^* בכל אחד מהמקרים הנ"ל?

T נורמלי:

תשובה:

נורמלי: תחילה נשים לב ש-

תכונת העתקה צמודה

הגדרה של נורמה מושרית ממ"פ

$$(*)\quad \|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(V)\rangle = \langle v, T^*T(v)\rangle \underset{\text{כי } T \text{ נורמלי}}{=} \langle v, TT^*(v)\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \|T^*(v)\|^2$$

תכונת העתקה צמודה

הגדרה של נורמה מושרית ממ"פ

כעת, יהי λ ע"ע של A (שמייצגת T) ידוע:

לפי בסיס אורתונו'

$$\exists v \neq 0 \quad (A-\lambda I)v = 0$$

$\|A-\lambda I\| = 0$ ⇐ כי $v \neq 0$, אז $A-\lambda I$ לא הפיכה

המשך אופרטור נורמלי:

כעת, נסתכל על A^* עם $\bar{\lambda}$ (אותו λ מהשלב הקודם).

$$\|(A^*-\bar{\lambda}I)v\| = \|(A-\lambda I)^*v\| \underset{\text{לפי } \circledast \text{ ט' קודם}}{=} \|(A-\lambda I)v\| = 0$$

+אם A נורמלית אז גם $A-\lambda I$ נורמלית.
הוכחה: תרגיל בית

ניתן להוכיח שגם הכיוון ההפוך נכון וסה"כ נקבל:

$\boxed{\lambda \text{ ע"ע של } A \iff \bar{\lambda} \text{ ע"ע של } A^*}$ (עבור A נורמלי)

ראינו יותר מוקדם בתרגול כי כל הע"ע של מטריצה אוניטרית ובאופן דומה של אופרטור אוניטרי הם מגודל 1.

אוניטרי:

צל"ע

צל"ע: $A^* = A$ ולכן כל λ ע"ע של A גם ע"ע של A^*.

ובגלל הנורמליות (כי צל"ע $\Rightarrow$ נורמלי) והכל $\lambda = \bar{\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$

אנטי סימטרי:

אנטי-סימטרי: יהיו λ ע"ע של A $\Longleftrightarrow$ $(-\lambda)$ ע"ע של $-A$ (עם אותו ו"ע)

ראינו אנטי-סימטרי $\Leftarrow$ נורמלי ולכן $\bar{\lambda} = -\lambda$

$$\Downarrow$$

λ מדומה טהור

משפט שימושי:

משפט: התנאים הבאים שקולים:

א. A אוניטרית.

ב. A מטריצת מעבר בין שני בסיסים או"נ

ג. עמודות A הן בסיס או"נ.

ד. שורות A הן בסיס או"נ

מקבילה להעתקות:

משפט 2: הבאים שקולים עבור $T:V\to V$

1. T שומרת מ"פ
2. T שומרת נורמה.
3. T אוניטרית
4. T מעבירה בסיס או"נ לבסיס או"נ.

המשך תכונות מטריצה אוניטרית בעמוד הבא...

תכונות של מטריצה אוניטרית:

שמירה על מ"פ

1. A מטריצה אוניטרית אם ורק אם שומרת מכפלה פנימית, כלומר

$$\forall x, y : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

אם ורק אם Aאוניטרית.

שמירה על נורמה

2. A מטריצה אוניטרית אם ורק אם היא שומרת על נורמה כלומר

$$\forall v : \|Av\| = \|v\|$$

כתוצאה מכך, ערך מוחלט של כל ערך עצמי שלה הוא 1.

3. אם A אוניטרית אז $A^*, \bar{A}$ גם הן אוניטריות.

4. מטריצה A מעל שדה היא אוניטרית אם ורק אם שורותיה(עמודותיה) הן בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית בו.

טענה: A נורמלי

כל ו"ע השייכים לע"ע שונים, מאונכים.

הוכחה:

יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \underset{\text{ראינו}}{\mathbb{R}}$ ע"ע שונים

$v_1, \dots, v_n$ הו"ע השייכים להם

אזי לכל $i \neq j$ מתקיים

ע"ע λ_i

$$\lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \langle A v_i, v_j \rangle = \langle v_i, A^* v_j \rangle =$$

לינאריות רכיב ראשון

תכונת העתקה צמודה

$$\overset{\text{A נורמלי ולכן}}{=} \langle v_i, \bar{\lambda}_j v_j \rangle = \langle v_i, \bar{\lambda}_j v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle$$

λ_j ע"ע של $A \Leftrightarrow \bar{\lambda}_j$ ע"ע של A^* עם אותו ו"ע

סמי לינאריות רכיב שני

$$\Leftarrow \quad \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0 \text{ כי } \lambda_i \neq \lambda_j} \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

v_i, v_j מאונכים!

שימו לב שטענה זו נכונה לא רק עבור מטריצה נורמלית אלא גם עבור מטריצה אוניטרית ועבור מטריצה צל"ע
ראינו כי-אוניטרי->נורמלי
צל"ע->נורמלי

נראה שהכיוון ההפוך לא נכון –כלומר קיימת מטריצה נורמלית שאינה אוניטרית
קיימת מטריצה נורמלית שאינה צל"ע

מעל הממשים

המטריצה מעל R

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

ראשית - נראה כי היא נורמלית.

כלומר - צ"ל -

$$AA^* = A^*A$$

נשים ♡ כי אנחנו מעל הממשים ולכן -

$$A^* = A^t$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & +\sqrt{2} \\ -1 & 3 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

מיותרים לבדוק הבא

$$A^tA = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 3 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

A נורמלית.

שנית - נראה כי A לא צמ"ע 2

תזכורת: אופרטור T צמ"ע $\leftrightarrow$ $T = T^*$. למעשה עם מטריצות מעל R; נרצה לבדוק האם

$A^* \xrightarrow{\text{מעל } R}$

$A = A^t$

כלומר - האם סימטרית.

קל לראות - כי המטריצה A לא אינה סימטרית $\Leftarrow$ A לא צמ"ע.

שלישית - נראה כי A לא אוניטרית (אורתוגונלית) 1

נראה כי עמודות המטריצה A הן לא בסיס אורתונורמלי.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = -3-3+2 = -4 \neq 0$$

ולכן - אורתוגונלי.

סיכום:

נורמלי: $T^*T = TT^*$

תכונות: 1. λ ע"ע של T ⇐ $\bar{\lambda}$ ע"ע של T^*.

2. ו"ע של ע"ע שונים הם מאונכים

או"ג $\xleftarrow{\mathbb{R}}$

אוניטרי $\xleftarrow{\mathbb{C}}$

אוניטרי: $T^* = T^{-1}$ ולחליפין $T^*T = I$.

תכונות: 1. אוניטרי ⇐ נורמלי. ולכן ✓

2. ו"ע של ע"ע שונים מאונכים.

3. מטריצה A אוניטרית ⟺ היא מטריצת מעבר בין שני בסיסים או"נ

⟺ עמודות A בסיס או"נ ⟺ שורות A בסיס או"נ.

4. אם λ ע"ע של T אז $|\lambda| = 1$

5. המשפט עם שמירת מ"פ ואורכים.

סימטרי $\xleftarrow{\mathbb{R}}$

הרמיטי $\xleftarrow{\mathbb{C}}$

צל"ע: $T^* = T$

תכונות: 1. צל"ע ⇐ נורמלי. ולכן ✓

2. ו"ע של ע"ע שונים הם מאונכים. (גם אם T במרוכבים)

3. אם λ ע"ע של T אז $\lambda \in \mathbb{R}$

בהצלחה!!!