תרגול 3 – טופולוגיה

<u>הגדרה</u> (רציפות בנקודה)

יהיו (X,d), (Y,ρ) שני מרחבים מטריים. נאמר שפונקציה $f:X\to Y$ היא רציפה בנקודה $a\in X$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in X$ המקיים $d(a,x)<\delta$, מתקיים $\rho(f(a),f(x))<\varepsilon$.

<u>הגדרה במונחי כדורים</u>

יהיו (X,d), (Y,ρ) שני מרחבים מטריים. נאמר שפונקציה $f:X\to Y$ היא רציפה בנקודה $a\in X$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in X$ המקיים $x\in B(a,\delta)$ מתקיים $f(x)\in B(f(a),\varepsilon)$ (או: $f(B(a,\delta))\subseteq B(f(a),\varepsilon)$).

<u>תרגיל</u>

יהיו $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}^n,d_{\max})$ שני מרחבים מטריים. תהי $p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציית ההטלה המוגדרת על ידי: $p_i(x_1,...,x_n)=x_i$. הראו ש-p_i היא פונקציה רציפה.

<u>פתרון</u>

תהי $a=(a_1,..,a_n)\in\mathbb{R}^n$ נקודה כלשהי. נראה כי p_i רציפה ב-a. יהי $\varepsilon>0$.
נרצה למצוא $\delta>0$ כך שאם $d_{\max}(x,a)=\max\limits_{1\le j\le n}|x_j-a_j|<\delta$ אזי $|p_i(x)-p_i(a)|<\varepsilon$.

טיוטה: $|p_i(x)-p_i(a)|=|x_i-a_i|\le\max\limits_{1\le j\le n}|x_j-a_j|<\delta$

אנו רוצים שביטוי זה יהיה קטן מאפסילון. בחירת $\delta=\varepsilon$ מסיימת את ההוכחה.

מש"ל

<u>משפט</u>

יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים, יהי $x\in X$, $f:X\to Y$. אזי התנאים הבאים שקולים:

א. f רציפה ב-x,

ב. אם $x_n \xrightarrow{d} x$ אז $f\left(x_n\right) \xrightarrow{\rho} f\left(x\right)$.

<u>דוגמה</u>

הוכחנו קודם שאם $x_n \xrightarrow{d_p} x$ אזי $cx_n \to cx$ ומהמשפט הנ"ל ניתן להסיק שלכל $c \in \mathbb{R}$ הפונקציה $f\left(x\right) = cx,\ f:\left(\mathbb{R}, d_p\right) \to \left(\mathbb{R}, d_p\right)$ רציפה.

<u>טענה</u>

תהי $\left\{\left(x_n, y_n\right)\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ סדרה ו-$\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2$. $\left(x_n, y_n\right) \to \left(x, y\right)$ לפי מטריקה $d_{\max}$ אמ"מ $x_n \to x,\ y_n \to y$ לפי המטריקה הסטנדרטית של $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>

נוכיח רק כיוון אחד. נניח כי $\left(x_n, y_n\right) \to \left(x, y\right)$. לפי תרגיל מהשיעור הקודם הפונקציות p_1, p_2 רציפות ובפרט רציפות ב-$\left(x, y\right)$. מהקריטריון הנ"ל נקבל ש-$p_1\left(x_n, y_n\right) \to p_1\left(x, y\right),\ \ p_2\left(x_n, y_n\right) \to p_2\left(x, y\right)$ ומכאן נקבל הדרוש.

[דרך אלטרנטיבית לשני הכיוונים:
$|x_n - x|, |y_n - y| \le \max\left(|x_n - x|, |y_n - y|\right) \le |x_n - x| + |y_n - y|$.]

מש"ל

<u>טענה</u>

יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי, ויהי $\left(A, d\right)$ תת מרחב.

U פתוחה ב-A $\Leftrightarrow$ $U = V \bigcap A$ עבור V פתוחה ב-X.

<u>שאלה</u>

יהי $\left(A, d\right)$ תת מרחב של $\left(X, d\right)$ ותהי $V \subseteq X$ קבוצה המקיימת $V \bigcap A$ פתוחה ב-$\left(A, d\right)$. האם V פתוחה ב-$\left(X, d\right)$?

תשובה: לא בהכרח. נבחר $X = \mathbb{R}$, $A = \left(0, 1\right)$, $V = \left[-1, 2\right]$. אזי $A = V \bigcap A$ פתוחה ב-$\left(A, d\right)$ (המרחב עצמו תמיד פתוח).

<u>הגדרה</u> (קבוצה סגורה)

יהי M מרחב מטרי. $S \subseteq M$ תיקרא "קבוצה סגורה" אם S^C היא קבוצה פתוחה.

<u>הגדרה שקולה</u>

יהי (X,d) מרחב מטרי. $A \subseteq X$ סגורה $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ כך ש- $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ מתקיים $x \in A$ (ז"א: קבוצה סגורה היא קבוצה המכילה את כל נקודות הגבול שלה).

<u>הערה:</u> לא סגורה $\neq$ פתוחה (למשל הקטעים מהצורה $[a,b)$ ב- $\mathbb{R}$).

<u>תרגיל</u>

מצאו דוגמה לתת מרחב מטרי A של $\mathbb{R}$ שבו מתקיים: כל קבוצה פתוחה ב-A היא פתוחה ב- $\mathbb{R}$; לא כל קבוצה סגורה ב-A סגורה גם ב- $\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

תחילה, נשים לב שהתנאי הראשון מתקיים אמ"מ A בעצמה פתוחה ב- $\mathbb{R}$ (להסביר בעל פה). נבחר $A=(0,4)$. תהי $U \subseteq A$ פתוחה ב-A, אזי היא מהצורה $U=V \bigcap A$ עבור V פתוחה ב- $\mathbb{R}$. מכיוון שגם A פתוחה ב- $\mathbb{R}$ נקבל ש- U פתוחה ב- $\mathbb{R}$. לגבי התנאי השני: $B=(0,1] \subseteq A$ סגורה ב-A. הסבר: $A-B=(1,4)$ היא קבוצה פתוחה ב-A (מדוע?), ולכן B סגורה ב-A. עם זאת, היא לא סגורה ב- $\mathbb{R}$ שכן הסדרה $B \supseteq \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאפס ב- $\mathbb{R}$, ואפס אינו שייך ל-B.

מש"ל

<u>משפט</u>

יהיו X,Y מרחבים מטריים. $f: X \to Y$ רציפה אמ"מ לכל $U \subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X (כלומר, תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה).

<u>הערה</u>: המשפט נכון גם עבור קבוצות סגורות.

<u>תרגיל</u>

יהיו $(X,d_1),(X,d_2)$ מרחבים מטריים. הוכיחו שמתקיים: $Id:(X,d_1)\to(X,d_2)$ רציפה $\Leftrightarrow$ לכל U פתוחה ב- (X,d_2), U פתוחה ב-(X,d_1).

<u>פתרון</u>

$\Leftarrow$: תהי U פתוחה ב-(X,d_2). אזי $Id^{-1}(U)$ פתוחה ב-(X,d_1). אבל, $Id^{-1}(U)=Id(U)=U$ ולכן U פתוחה ב-(X,d_1).

$\Rightarrow$: תרגיל.

מש"ל

<u>הגדרה</u> (מטריקות שקולות)

נאמר ששתי מטריקות על אותה קבוצה הן שקולות, אם הן מגדירות את אותה משפחה של קבוצות פתוחות.

<u>מסקנה</u> (מההגדרה ומהתרגיל)

יהיו ρ,d שתי מטריקות על X. נאמר שהן שקולות אמ"מ שתי הפונקציות $\begin{cases} Id:(X,\rho)\to(X,d) \\ Id:(X,d)\to(X,\rho) \end{cases}$ הן רציפות.

<u>הגדרה נוספת של מטריקות שקולות:</u>

יהיו ρ,d שתי מטריקות על X. נאמר שהן שקולות אמ"מ:
$\{x_n\}\xrightarrow{\rho}x \Leftrightarrow \{x_n\}\xrightarrow{d}x$.

[שימו לב שבשבוע שעבר ראינו דוגמה למטריקות שאינן שקולות לפי קריטריון זה.. להזכיר...]

<u>הסבר לשקילות ההגדרות:</u>

ראינו ש-ρ שקולה ל- d אמ"מ $\begin{cases} Id_\rho:(X,\rho)\to(X,d) \\ Id_d:(X,d)\to(X,\rho) \end{cases}$ רציפות. כעת,
$\{x_n\}\xrightarrow{\rho}x \Rightarrow \{x_n\}\xrightarrow{d}x \Rightarrow Id_d(\{x_n\})\xrightarrow{\rho}Id_d(x)$; וכנ"ל עבור הצד השני.

<u>תרגיל</u>

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית. נגדיר את הגרף של f:
$Gr_f:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=f(x)\}$. הוכיחו כי Gr_f הינה תת קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^2$ לכל פונקציה רציפה f.

<u>פתרון</u>

תהי $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-Gr_f. נניח שהיא מתכנסת לנקודה $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ונרצה להראות ש- $(x,y)\in Gr_f$, כלומר $y=f(x)$.

לפי ההנחה $(x_n,y_n)\to(x,y)$ ולכן $\begin{cases} x_n\to x \\ y_n\to y\end{cases}$. כעת, מכיוון ש- f רציפה, נקבל שמתקיים $f(x_n)\to f(x)$. שימו לב ש-$f(x_n)=y_n$ ולכן נקבל $\begin{cases} y_n=f(x_n)\to f(x) \\ y_n\to y\end{cases}$ ומיחידות הגבול נקבל $f(x)=y$.

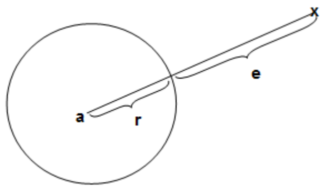
מש"ל

<u>**תרגיל**</u>

הוכיחו שבכל מרחב מטרי כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

<u>פתרון</u>

נסמן ב- $B[a,r]$ את הכדור הסגור ונרצה להראות שהקבוצה $(B[a,r])^C$ היא פתוחה. יהי $x\in(B[a,r])^C$ ונרצה למצוא $\varepsilon>0$ כך ש- $x\in B(x,\varepsilon)\subseteq(B[a,r])^C$.
לפי הציור ניתן לראות את הבחירה של ε:



נבחר $\varepsilon=d(x,a)-r>0$.

ניקח $y\in B(x,\varepsilon)$ ולכן $d(y,x)<\varepsilon$.

צריך להראות ש:$y\notin B[a,r]$, משמע $d(y,a)>r$.
$d(y,x)<\varepsilon=d(x,a)-r \;\Rightarrow\; r<d(x,a)-d(y,x)$.
$r<d(x,a)-d(y,x)\le d(y,a)+d(y,x)-d(y,x)=d(y,a)$ ולכן $r<d(y,a)$.

מש"ל

<u>**קבוצות פתוחות/סגורות דרך פונקציות רציפות**</u>

<u>**תרגיל**</u>

תהי $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy<1\}$ תת קבוצה של $\mathbb{R}^2$. הוכיחו ש-D פתוחה.

<u>פתרון</u>

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x,y)=xy$. קל לראות ש-f רציפה (כמכפלה של שתי הטלות רציפות). מתקיים:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)<1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\infty<f(x,y)<1\}=f^{-1}\left[(-\infty,1)\right]$$

$(-\infty,1)$ היא קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}$, f רציפה, ולכן D פתוחה כתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה תחת פונקציה רציפה.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

יהי (X,d) מ"מ, ותהי $a\in X$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $f_a:X\to\mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי. $f_a(x)=d(x,a)$ היא רציפה.

ב. הסיקו שלכל $r>0$ הכדור $B[a,r]$ הוא קבוצה סגורה.

<u>פתרון</u>

א. תהי $x\in X$. נוכיח ש-f_a רציפה ב-x. יהי $\varepsilon>0$. ניקח $\delta=\varepsilon$. אזי אם $d(x,y)<\delta$ מתקיים

$$\left|f_a(x)-f_a(y)\right|=\left|d(x,a)-d(y,a)\right|\le d(x,y)<\delta=\varepsilon$$

ב. מתקיים:

$$B[a,r]=\{x\in X : 0\le d(x,a)\le r\}=\{x\in X : 0\le f_a(x)\le r\}=f_a^{-1}[0,r]$$

f_a רציפה ולכן (בגלל ש-$[0,r]\subseteq\mathbb{R}$ סגורה) $B[a,r]$ סגורה.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

יהי M מ"מ. תהי $A\subseteq M$ קבוצה סגורה. הוכיחו שאם $x\notin A$ אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $B\left(x,\frac{1}{n}\right)\cap A=\varnothing$.

<u>פתרון</u>

$x \notin A$ ולכן $x \in A^C$. A^C פתוחה ולכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(x,\varepsilon) \subseteq A^C$. קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\varepsilon > \frac{1}{n}$ ולכן $B\left(x,\frac{1}{n}\right) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq A^C$ ומכאן $B\left(x,\frac{1}{n}\right) \bigcap A = \varnothing$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שבמרחב מטרי כל קבוצה סגורה ניתנת להצגה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

<u>פתרון</u>

יהי (M,d) מ"מ. תהי $A \subseteq M$ קבוצה סגורה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $O_n = \bigcup_{a \in A} B\left(a,\frac{1}{n}\right)$.

O_n פתוחה כאיחוד של כדורים פתוחים. נראה ש- $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$.

ברור ש- $A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$: אם $a \in A$ אזי $a \in B\left(a,\frac{1}{n}\right) \subseteq O_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לכן $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$.

בכיוון השני: ניקח $x \notin A$ ונראה $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$. נניח ש-$x \notin A$. A סגורה $\Leftarrow$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $B\left(x,\frac{1}{n}\right) \bigcap A = \varnothing$ (לפי התרגיל הקודם). לכן לכל $a \in A$ מתקיים $a \notin B\left(x,\frac{1}{n}\right)$, ולכן $x \notin B\left(a,\frac{1}{n}\right)$. לכן $x \notin \bigcup_{a \in A} B\left(a,\frac{1}{n}\right) \Leftarrow x \notin O_n \Leftarrow x \notin \bigcap O_n$.

מש"ל

<u>נקודות הצטברות</u>

<u>הגדרה</u> – נקודת הצטברות במרחב מטרי (הגדרות שקולות)

1. יהי (X,d) מ"מ ותהי $A \subseteq X$ תת קבוצה. $a \in X$ תקרא נקודת הצטברות של A אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\left(B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}\right) \bigcap A \neq \varnothing$. כלומר, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x \neq a \in A$ כך ש-$x \in B(a,\varepsilon)$ (משמע: $0 < d(x,a) < \varepsilon$).

2. $a\in X$ נקודת הצטברות של A אם קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A\setminus\{a\}$ כך ש-$x_n\to a$.

3. $a\in X$ נקודת הצטברות של A אם קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A$ <u>בעלת איברים שונים</u> כך ש-$x_n\to a$.

<u>הערה</u>: נקודת הצטברות של A אינה בהכרח שייכת ל-A.

<u>סימון</u>: נסמן ב-A' את אוסף כל נקודות ההצטברות של A.

טענה: (הוכחה בתרגיל בית) A סגורה $\Leftrightarrow$ $A'\subseteq A$.

<u>תרגיל</u>

יהי (M,d) מ"מ. $A\subseteq M$. הוכיחו $A''\subseteq A'$.

<u>פתרון</u>

תהי $x\in A''$ וצ"ל ש-$x\in A'$. במילים אחרות צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $y\in A$ כך ש-$0<d(x,y)<\varepsilon$. יהי $\varepsilon>0$. מהנתון $x\in A''$ מסיקים לפי ההגדרה כי קיימת נקודה $z\in A'$ כך ש-$0<d(x,z)<\frac{\varepsilon}{2}$. מכיון ש-$z\in A'$ ידוע שעבור $d(x,z)>0$ (בתפקיד אפסילון) קיימת נקודה $y\in A$ כך ש-$0<d(z,y)<d(x,z)$ (*). מאי-שוויון המשולש מקבלים הדרוש, שכן $d(x,y)\le d(y,z)+d(x,z)<2d(x,z)<\varepsilon$ ומאידך ברור מ-(*) כי $x\neq y$.

מש"ל

<u>מסקנה מהתרגיל הקודם</u>: יהי (M,d) מ"מ, תהי $A\subseteq M$, אזי A' סגורה.
כלומר קבוצת נקודות ההצטברות של כל קבוצה היא תמיד קבוצה סגורה.

הוכחה: $(A')'=A''\subseteq A'$.