

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – פתרון מועד א' – תשפ"ה

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x, y, z והפרמטר a , בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x + 4y = a \\ x + a^2y + z = a + 1 \\ x + a^2y + az = a + 2 \\ (4 - a^2)y - z = a^2 - 2a - 1 \end{cases}$$

נתחיל בדירוג ראשוני של המטריצה המייצגת את מערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & a \\ 1 & a^2 & 1 & | & a+1 \\ 1 & a^2 & a & | & a+2 \\ 0 & 4-a^2 & -1 & | & a^2-2a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & a \\ 1 & a^2 & 1 & | & a+1 \\ 0 & 0 & a-1 & | & 1 \\ 0 & 4-a^2 & -1 & | & a^2-2a-1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & a \\ 0 & a^2-4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & | & 1 \\ 0 & 4-a^2 & -1 & | & a^2-2a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & a \\ 0 & a^2-4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & a^2-2a \end{pmatrix}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

כאשר $a^2 - 2a \neq 0$ כלומר $a(a-2) \neq 0$, כלומר $a \neq 0, 2$ השורה האחרונה היא שורת סתירה, ולכן אין פתרונות.

עבור $a = 0$ נציב ונמשיך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, ללא משתנים חופשיים ולכן פתרון יחיד.

עבור $a = 2$ נציב ונמשיך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, עם משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.

סה"כ:

$a = 0$ פתרון יחיד

$a = 2$ אינסוף פתרונות

$a \neq 0, 2$ אין פתרונות

ב. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 0$.

נמשיך לדירוג קנוני:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1+R_3 \\ R_2+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & -4 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{4}R_2 \\ -R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון היחיד הוא

$$\left(2, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

ג. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 2$.

המטריצה שקיבלנו כבר מדוגרת קנונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $y = t$ ונקבל

$$x = 2 - 4t$$

$$z = 1$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$(2 - 4t, t, 1) = (2, 0, 1) + t(-4, 1, 0)$$

שאלה 2 תהי העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$$

$$T(0, 1, 0) = (2, 1, 0)$$

$$T(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$$

א. חשבו את $T(0, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} T(0, 0, 1) &= T((1, 1, 1) - (1, 0, 0) - (0, 1, 0)) = T(1, 1, 1) - T(1, 0, 0) - T(0, 1, 0) = \\ &= (3, 3, 3) - (1, 2, 0) - (2, 1, 0) = (0, 0, 3) \end{aligned}$$

ב. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת $\det([T])$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננטה לפי השורה השלישית

$$\det([T]) = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3(1 - 4) = -9$$

ג. חשבו את $T(T(a, b, c))$

נשתמש במטריצה המייצגת:

$$T(T(a, b, c)) = [T]^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

נחשב את המטריצה המייצגת בריבוע:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$[T]^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 4b \\ 4a + 5b \\ 9c \end{pmatrix}$$

סה"כ

$$T(T(a, b, c)) = (5a + 4b, 4a + 5b, 9c)$$

ד. מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש $D = P^{-1}[T]P$

ראשית נמצא את הפולינום האופייני

$$p_{[T]}(x) = \det(xI - [T]) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ -2 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix} =$$

נחשב את הדטרמיננטה לפי השורה השלישית

$$\begin{aligned} &= (x-3) \cdot \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix} = (x-3)((x-1)^2 - 4) = (x-3)(x-1-2)(x-1+2) = \\ &= (x-3)^2(x+1) \end{aligned}$$

ולכן הע"ע הם $\lambda = -1, 3$

נמצא לכל אחד מהם ו"ע. נתחיל ב- $\lambda = 3$

$$V_3 = N(3I - [T]) = N \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $x = t, y = t, z = s$ ונקבל $x = t$

$$(t, t, s) = t(1, 1, 0) + s(0, 0, 1)$$

כלומר מצאנו שני ו"ע $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$

עבור הע"ע $\lambda = -1$

$$V_{-1} = N(-I + [T]) = N \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $y = t$ ונקבל $z = 0, x = -t$

$$(-t, t, 0) = t(-1, 1, 0)$$

קיבלנו ו"ע נוסף $(-1, 1, 0)$

לכן סה"כ

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

שאלה 3 אין קשר בין הסעיפים.

א. מצאו את כל המספרים המרוכבים המקיימים $iz^7 = iz$.

$$iz(z^6 - 1) = 0$$

לכן $z = 0$ או $z^6 = 1$

הפתרונות של $z^6 = 1 = cis(0)$ הם

$$z_k = cis\left(\frac{0 + 2\pi k}{6}\right)$$

עבור $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

ב. מצאו את כל המספרים המרוכבים $z \in \mathbb{C}$ המקיימים $z^2 + 2iz + 1 = 0$.

$$z_{1,2} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-8}}{2} = -i \pm \sqrt{-2} = -i \pm \sqrt{2}i = i(-1 \pm \sqrt{2})$$

ג. נביט בוקטורים $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, b, c)$. נתון כי הזווית ביניהם היא $\frac{2\pi}{3}$ וכן $|\vec{w}| = \sqrt{18}$.

מצאו את b .

ידוע כי

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \cos(\theta)$$

נציב את הוקטורים והנתונים מהשאלה:

$$\frac{(1,1,0) \cdot (1,b,c)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{18}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1+b}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$1+b = -3$$

$$b = -4$$

שאלה 4 בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול.

א. $\int_0^1 \left(\int_0^2 x e^x dy \right) dx$

ראשית נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^2 x e^x dy = [x e^x y]_0^2 = 2x e^x$$

כעת נחשב את האינטגרל החיצוני

$$\int_0^1 2x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} f' = e^x \\ f = e^x \end{array} \quad \begin{array}{l} g = 2x \\ g' = 2 \end{array} \right\} = [2x e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = 2e - [2e^x]_0^1 = 2e - (2e - 2) = 2$$

ב. $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} (x+y) dx \right) dy$

התחום הוא

$$D = \left\{ (x,y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y} \leq x \leq \sqrt{1-y} \end{array} \right\}$$

נשים לב שקצה התחום הוא העקומה $x^2 = 1 - y$ או $y = 1 - x^2$ (שראינו במספר רב של דוגמאות).

נעביר אותו להצגה לפי x

$$D = \left\{ (x,y) \mid \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x^2 \end{array} \right\}$$

ולכן האינטגרל בשאלה שווה לאינטגרל הבא לאחר החלפת סדר האינטגרציה

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} (x+y) dy \right) dx$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^{1-x^2} (x+y) dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} = x(1-x^2) + \frac{1}{2}(1-x^2)^2 = x - x^3 + \frac{1}{2}(1 - 2x^2 + x^4)$$

וכעת לאינטגרל החיצוני

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right]_{-1}^1 = \frac{2}{10} - \frac{2}{3} + \frac{2}{2} = \frac{8}{15}$$

ג. $\iint_D f(x,y) dx dy$, כאשר $f(x,y) = x^2$ והתחום D הוא $D = \left\{ (x,y) \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right\}$

נעביר לקואורדינטות קוטביות, כיוון שהתחום הוא רבע המעגל ברביע הראשון.

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos(\theta))^2 r d\theta \right) dr$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos^2(\theta) d\theta = r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} d\theta = \frac{r^3}{2} \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} + \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^3}{4}$$

כעת נעבור לאינטגרל החיצוני

$$\int_0^1 \frac{\pi}{4} r^3 dr = \left[\frac{\pi r^4}{16} \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}$$

דף נוסחאות מתמטיקה ב לכימאים:

מרכיבים:

חיבור וכפל מרכיבים:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

הגדרה:

יהי $z = a + bi \in \mathbb{C}$ נגדיר את הצמוד המרוכב שלו בצורה הקרטזית להיות

$$\bar{z} = a - bi$$

בצורה הגאומטרית (פולארית):

$$\bar{z} = r \operatorname{cis}(-\theta)$$

כפל מרוכב בצמוד שלו:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

חילוק מרכיבים:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd + adi + bci}{c^2 + d^2}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

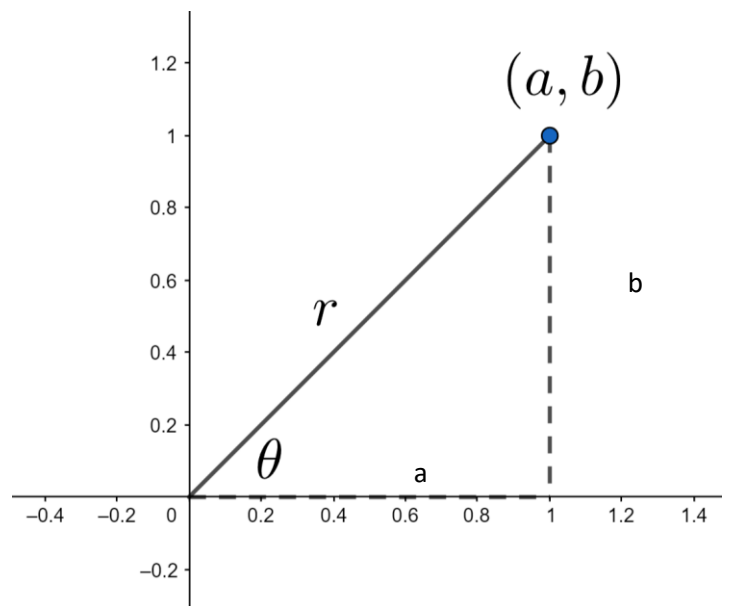
$$\sin(\theta) = \frac{b}{r}$$

$$b = r \cdot \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r}$$

$$a = r \cdot \cos(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$



בהנתן r, θ הצורה האלגברית היא:

$$a + bi = r \cos(\theta) + i r \sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = r \operatorname{cis}(\theta)$$

כפל מרכיבים בצורה הגאומטרית

$$r_1 \operatorname{cis}(t_1) \cdot r_2 \operatorname{cis}(t_2) = r_1 r_2 (\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(t_1 + t_2)$$

משפט דה-מואבר

$$(r \operatorname{cis}(\theta))^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

פתרון משוואה מרכיבת אם $a + bi \neq 0$ אז יש בדיוק n פתרונות שונים.

$$z^n = a + bi$$

יהי $r \neq 0$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי הפתרונות למשוואה

$$z^n = r \operatorname{cis}(\theta)$$

$$z_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

נוסחאת השורשים :

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

יהי V מרחב וקטורי ויהיו $v_1, \dots, v_k \in V$ וקטורים במרחב.

אומרים כי V נפרש (נוצר) ע"י הוקטורים $v_1, \dots, v_k$ אם

$$V = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k | a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

סימון: אם המרחב V נפרש ע"י $v_1, \dots, v_k$ רושמים כי

$$V = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$$

פעולה אלגברית בין וקטורים מכפלה סקלרית.

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz$$

המכפלה הסקלרית של וקטור בעצמו.

$$(x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = |(x, y, z)|^2$$

מכפלה סקלרית:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\theta)$$

חישוב זווית בין וקטורים ($\vec{v}, \vec{w} \neq 0$)

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \cos(\theta)$$

פונקציות לינאריות:

נוסחא:

$$T(x, y, z) = (x, y)$$

הגדרה: פונקציה

$$T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$$

פונקציה (העתקה) לינארית

$$\begin{aligned} T(v + w) &= T(v) + T(w) \\ T(av) &= aT(v) \end{aligned}$$

כפל מטריצות:

$$\mathbb{F}^{m \times n} \bullet \mathbb{F}^{n \times k} = \mathbb{F}^{m \times k}$$

העתקה שגוזרת פונקציות :

$$\begin{aligned} (f + g)' &= f' + g' \\ (cf)' &= cf' \end{aligned}$$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ מטריצת היחידה}$$

כפל במטריצת היחידה הוא כמו לכפול באחד

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

מטריצה הפיכה

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

חישוב דטרמיננטה במטריצה 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

מכפלה הוקטורית

$$|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin(\theta)$$

כיוון הוקטור מאונך ל w, v .

חישוב מכפלה סקלרית

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz$$

הנוסחא למכפלה וקטורית

$$(a, b, c) \times (x, y, z) = (bz - yc, xc - az, ay - bx)$$

נשים לב לדבר הבא: נגדיר מטריצה P שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים של המטריצה.

אם יש מספיר וקטורים עצמיים כך ש P תהיה ריבועית.

לכסון:

$$D = P^{-1}AP$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{אלכסונית} \\ \text{העע על האלכסון}}} = P^{-1} \underbrace{A}_{\substack{\text{וקטורים עצמיים בעמודות} \\ P}}$$

הפיכת מטריצות:

1. נשים את המטריצה A ומימינה את מטריצת היחידה I
2. נדרג קנונית עד שמצד שמאל נגיע למטריצת היחידה I (אם בצד שמאל התאפסה שורה, המטריצה אינה הפיכה)
3. מצד ימין תופיע המטריצה ההופכית A^{-1}

חדוא בשני משתנים:

הקשר בין דיפרנציאל ואינטגרל עפ"י הנוסחא של ניוטון לייבניץ

$$\underbrace{\int_a^b}_{\text{השטח}} f = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{הקדומה}}$$

כלל הסנדוויץ' - רציפות פונקציה

$$h(x, y) \leq g(x, y) \leq f(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

כן רציפה.

גזירות פונקציה:

משוואת מישור דרך נקודה (x_0, y_0, z_0)

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

השיפועים A, B הם הנגזרות החלקיות לפי x, y בנקודה.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) היא

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

אינטגרלים

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ הוא תחום במישור, $f(x, y)$ מודדת את גובה גרף הפונקציה מעל כל נקודה בתחום.

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

נגזרות ואינטגרלים במשתנה אחד.

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln(x)}$$

$$(x^a)' = (e^{a \ln(x)})' = e^{a \ln(x)} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln[f(x)]$
$y' = c^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln c$	$y = c^{f(x)}$
$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$y = e^{f(x)}$
$y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$	$y = [f(x)]^n$
$y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$	$y = \sin(f(x))$
$y' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$	$y = \cos(f(x))$
$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$	$y = \tan(f(x))$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$fg = \int (f'g + fg')$$

$$fg = \int f'g + \int fg'$$

הנוסחא שקוראים לה "אינטגרציה בחלקים":

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\int \arctan(x) dx = \left\{ \begin{array}{ll} f' = 1 & g = \arctan(x) \\ f = x & g' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\} = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

שיטת ההצבה:

1. מציבים $t = g(x)$
2. גוזרים ולכן $dt = g'(x)dx$
3. מחליפים כל מופע של x ל t , ואז פותרים את האינטגרל
4. מחזירים את t לשפה של x

הערה: אפשר להתחיל מהצבה "הפוכה" $x = g(t)$ ולהמשיך באופן דומה.

הצבה הפוכה: לחלץ את x ולהציגו כפונקציה של t

זהויות:

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

אם יש לנו בית (גרף) שרצפתו היא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ וגובה התקרה נמדד ע"י $f(x, y)$ אזי האינטגרל הכפול מוגדר להיות

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \text{נפח הבית}$$

שינוי קואורדינטות.

$$(x, y) = (r \cos(t), r \sin(t))$$

$$dx dy \rightarrow r dr dt$$

חישוב סקיצה של שטח הרצפה :

1. למצוא את כל נקודות החיתוך בין העקומות
2. בין כל שתי נקודות חיתוך, לראות מי מעל מי על ידי הצבת נקודה (הסבר: לפי רציפות, בין לבין חיתוכים הפונקציות לא יכולות להחליף מעלה מטה).