פתרון תרגיל 9   88236 תשע"ה

1 א. דרך I: לפי הגדרת curl ולרגולריות (משתמשים בכך ש $f''_{xy}=f''_{yx}$ וכו' (בדוק). דרך II: ניקח דיסק סביב $\bar{x}_0$ ברדיוס r, D_r ב-G. לפי משפט סטוקס

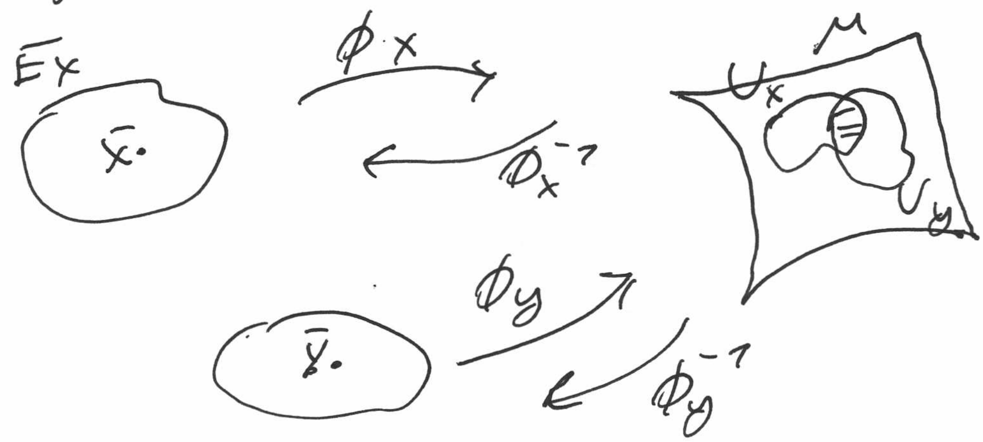
$$\iint_{D_r} \langle \mathrm{curl}(\nabla F), N\rangle\, ds = \int_{\partial D_r} \nabla F\cdot \vec{dx} = \int_{\partial D_r} F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz$$

מאחר ו-F היא פונקציה ל-(F'_x,F'_y,F'_z) האינטגרל האחרון הוא 0. כעת, $\mathrm{curl}(\nabla F)=(h_1,h_2,h_3)$. אם ניקח את D_r להיות עם נורמל $(1,0,0)$ נקבל $\iint_{D_r} h_1\, ds = 0$. לפי משפט ערך הממוצע לאינטגרל זה גם $h_1(x_r,y_r,z_r)\cdot\pi r^2$ כאשר $(x_r,y_r,z_r)\in D_r$. נשאיף r ל-0 ונקבל מרציפות h_1 ש $h_1(\bar{x}_0)=0$. בדומה: (לפי) בחירת דיסקים בניצב לציר y, ציר z מקבלים ש $0=h_2(\bar{x}_0)=h_3(\bar{x}_0)$ ולכן $\mathrm{curl}=0$.

ב. מתקיים $\mathrm{curl}(\phi\cdot \underline{f})=\nabla\phi\times \underline{f}+\phi\,\mathrm{curl}\,\underline{f}$ (בדוק)

ולכן $\mathrm{curl}(F\cdot\nabla G)=\nabla F\times\nabla G+F\cdot\mathrm{curl}(\nabla G)$, $\mathrm{curl}\,\nabla G=0$ כי ∇G משמר ומקבלים השוויון השמאלי. הימני בדומה או לפי חילופי תפקידים.

2 עבור $x,y\in M$; $x\neq y$ וכך ש $U_x\cap U_y\neq\phi$ המצב כך:



הפונקציה $\phi_y^{-1}\circ\phi_x$ מוגדרת על $\phi_x^{-1}(U_x\cap U_y)$ והיא

של $\phi_y^{-1}(U_x\cap U_y)$ [זוהי פונקציה מ $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}^2$]. מגדירים

$\phi_x=\phi_y\circ(\phi_y^{-1}\circ\phi_x)$. ϕ_x', ϕ_y' הן מטריצות 3×2

מדרגה 2 ומקיימים לפי כלל השרשרת

$\phi_x'=\phi_y'\cdot(\phi_y^{-1}\circ\phi_x)'_{2\times2}$. (כרגע שמאלית (טרנספוז))

ונקבל $\phi'^{t}_{x\,2\times3}=(\phi_y^{-1}\circ\phi_x)'^{t}\cdot\phi_y'^{t}$ (*).

שתי שורות המטריצה השמאלית הן $\phi_x'^{t}u_1$, $\phi_x'^{t}u_2$

$(u_1,u_2\in E_x)$ ובדומה שורות $\phi'^{t}_{y\,2\times3}$ הן $\phi_y'^{t}u_1$, $\phi_y'^{t}u_2$.

• $(u_1,u_2)\in E_y$. אכן כיוונים:

<u>למה:</u> אם $\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}_{2\times3}=A_{2\times2}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}_{2\times3}$ אז $v_1\times v_2=\det(A)\cdot w_1\times w_2$

<u>הוכחה:</u> אם $\det A=0$ אז v_1,v_2 ת"ל! $v_1\times v_2=0$. אם

$\det A\neq0$ אז כידוע A היא מכפלת מטריצות אלמנטריות ויש 3

סוגים: א) החלפת שורות, אז $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\det P=-1$ ואז

$v_1=w_2$, $v_2=w_1$ ו- $v_1\times v_2=-w_1\times w_2$. ב) הוספת כפולה של

שורה לאחרת. כלומר $P=\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$. $\det P=1$! (למשל

• $v_1=w_1+\lambda w_2$, $v_2=w_2$, וכן! $v_1\times v_2=w_1\times w_2$.

ג) הכפלת שורה בי $\lambda\neq0$. $P=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$ ואז (למשל

$v_1=\lambda w_1$, $v_2=w_2$! $v_1\times v_2=\lambda\cdot(w_1\times w_2)$. כך כפ"ל

מ 3 הסוגים מתקיימת תוצאת הלמה עם $A=P$. מאחר ו- A

היא כאמור מכפלת אלמנטריות והדטרמיננטה כפלית נובעת הלמה.

כעת, מהגדרות ϕ_x', ϕ_y' ושל E_x, E_y מתקיים

שכיוון הנורמל הוא $\vec{n}$ או $-\vec{n}$ לפי (*), לפי הנתון

ולפי הלמה נובע שב- $U_x\cap U_y$ ϕ_x', ϕ_y' מקבלות

אותו ערך, $\vec{n}$ או $-\vec{n}$.

נגדיר כעת שני קבוצות: $A^+=\{\bar{x}\in M:$ עבור ϕ_x ערך הכיווני הוא $\bar{n}\}$

ו- $A^-=\{x\in M:$ עבור ϕ_x ערך הכיווני הוא $-\bar{n}\}$. A^+ היא קבוצה פתוחה, שכן

אם $x'\in U_x$ אז יש חיתוך בין U_x ו- $U_{x'}$ ולפי מה

שהראינו, ה- $E_{x'}$ ערך הכיווני הוא $\bar{n}$. באופן דומה נוכיח

שגם A^- קבוצה פתוחה, לפי ש- M קשיר אחת מהן,

A^+ או A^- היא קבוצה ריקה והמשפט נוכח.

<u>הערה 1</u>: לקבוצות ב- M הנ"ל נובע לפי שיש הרחבה גזירה

ברציפות מדרגה מלאה של הפרמטריזציה ϕ_x.

• <u>הערה 2</u>: אם חס ואילו M לא קשיר אז מקבלים שיש

נורמל רציף לכל רכיב קשירות של M.

$\boxed{3}$ א. $\phi(0,v)=\phi(2\pi,-v)=(R,0,v)$. לגבי 1-1: נניח כי

$$\left(\left(R-v_1\sin\frac{u_1}{2}\right)\cos u_1,\left(R-v_1\sin\frac{u_1}{2}\right)\sin u_1,v_1\cos\frac{u_1}{2}\right)=$$

$$=\left(\left(R-v_2\sin\frac{u_2}{2}\right)\cos u_2,\left(R-v_2\sin\frac{u_2}{2}\right)\sin u_2,v_2\cos\frac{u_2}{2}\right)$$

כוקטורים ב- R^2, שני הרכיבים הראשונים דכל וקטור דשוויון

• למעלה הם וקטור ב- R^2 שגודלו בהתאמה $R-v_1\sin\frac{u_1}{2}$,

$R-v_2\sin\frac{u_2}{2}$ (אורך חיובי כי $\frac{\alpha}{2}<R$) וזוויותיהם בהתאמה

הן u_1,u_2, לכן $u_1-u_2=2\pi k$, לכן $u_1=u_2$ ולפי

האורך השווה, גם $v_1=v_2$, אלא אם כן $\sin\frac{u_1}{2}=\sin\frac{u_2}{2}=0$.

אבל אז $u_1=u_2=0$ ולפי רכיב z של הוקטורים נובע $v_1=v_2$,

וסה"כ נובעת 1-1.

ב. מגזירה

$$\phi'_u=\left(-R\sin u-\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\cos u+v\sin\frac{u}{2}\sin u,\right.$$

$$\left.R\cos u-\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\sin u-v\sin\frac{u}{2}\cos u,-\frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\right)$$

$$\phi'_v=\left(-\sin\frac{u}{2}\cos u,-\sin\frac{u}{2}\sin u,\cos\frac{u}{2}\right)$$

ואז $\phi'_u(0,0)=(0,R,0)$, $\phi'_v(0,0)=(0,0,1)$

$\phi'_u(2\pi,0)=(0,R,0)$ $\phi'_v(2\pi,0)=(0,0,-1)$

ולכן השוני בין $+1$ ל--1 נובע הצרוש

* באופן כללי $\phi'_u(0,v)=(-\frac{v}{2},R,0)$ $\phi'_v(0,v)=(0,0,1)$

והנקודה שנבדקה אליה אחרי סיבוב, $\phi(2\pi,-v)$ מתקיים

$\phi'_u(2\pi,-v)=(-\frac{v}{2},R,0)$, $\phi'_v(2\pi,-v)=(0,0,-1)$.

והנורמל הפך בכיוונו.

3. הבחירה של הנורמל $n(\bar{x})=n(u,v)=\dfrac{\phi'_u\times\phi'_v}{|\phi'_u\times\phi'_v|}$ $[u,v=u(x),v(x)]$

- מגדירה נורמל רציף על תמונת $(0,2\pi)\times[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}]$ שאינה מכסה המגרים בלי הקו הראשון - אחרון. מתקיים

$$\lim_{u\to 2\pi^-} n(u,v) = -\lim_{u\to 0^+} n(u,v)$$

עם זאת אפשרות בחירה רציפה של הנורמל והוא אינו אוריינטבילי.

$\boxed{4}$ נזכר: אם $p\in\partial M$, אז וקטור v, $v\in T_p(M)\setminus T_p(\partial M)$

- נקרא וקטור פנימי אם יש מסלה, $\gamma:[0,\epsilon)\to M$, $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v$.

נניח כעת שפרמטריזציה תקנית מסו"מת, $\bar{X}(u_1,u_2)$, מתקיים

$v=\alpha\cdot\bar{X}'_{u_1}+\beta\bar{X}'_{u_2}$, כאשר $\beta>0$ (כאן הגדרות מחוסגות)

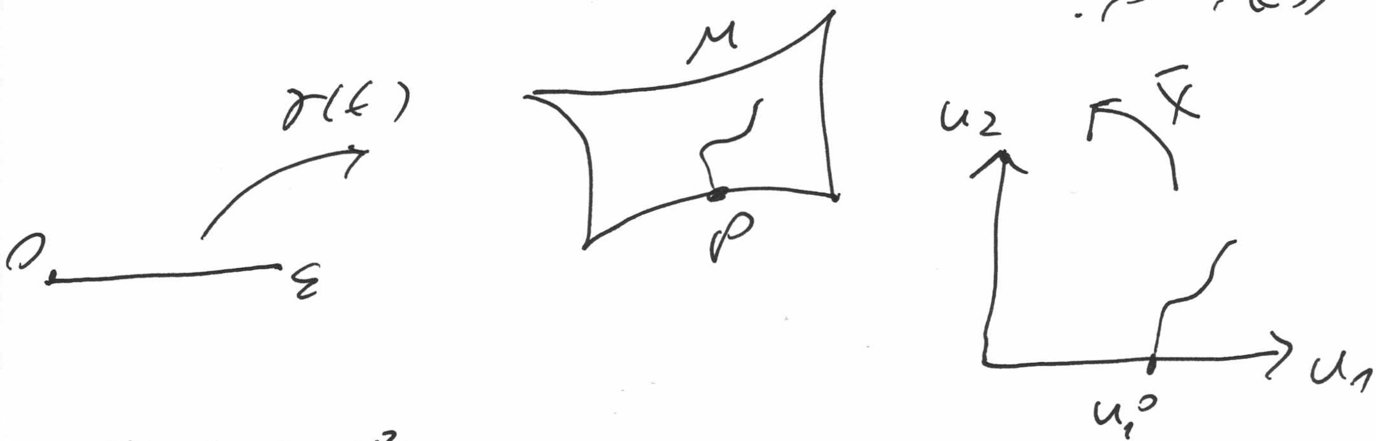
הנקודה $(u_1^0,0)$, $\bar{X}(u_1^0,0)=p$. נגדיר מסלה $\gamma(t)$ כך:

$\gamma(t)=\bar{X}(u_1^0+\alpha t,0+\beta t)$. אז γ לתוך M (כי היא תקנית! - $\beta>0$), $\gamma(0)=p$ ולכן כלל השרשרת $\gamma'(0)=v$.

בכיוון ההפוך, נניח ש-v פנימי ושו- $\bar{X}(u_1,u_2)$ פרמטריזציה תקנית. מתקיים $v=\alpha\cdot\bar{X}'_{u_1}(u_1^0,0)+\beta\bar{X}'_{u_2}(u_1^0,0)$. אם $\beta=0$

אז נובע

θ $v\in T_p(\partial M)$ וזו סתירה. לכן $\beta\neq 0$. נותר להראות ש-
$\beta>0$. יש לפי הגדרה מסילה $\gamma:[0,\varepsilon)\to M$ וכו'
נראה כך:



$\bar X^{-1}\circ\gamma$ היא מסילה שתמונתה ב H^2 והיא גזירה ברציפות

- ו- 1-1 (לפי משפט הפונקציה ההפוכה יש 2 קורדינטות היא הומיאומורפיזם מסביב: שלהן ב $\mathbb{R}^3$ אשר M סביבה של $(u_1^0,0)$ ב $\mathbb{R}^2$). מקיימים

$$X^{-1}\circ\gamma(t)=(u_1^0+\ell_1(t),0+h(t))$$ כאשר

$h(t)\geq 0$. h, ℓ_1 גזירות ברציפות. אז

$\gamma(t)=\bar X\circ(\bar X^{-1}\circ\gamma)(t)$ ולכן $\gamma(t)=\bar X(u_1^0+\ell_1(t),h(t))$

! $\gamma'(t)=\bar X'_{u_1}\cdot\ell_1'(t)+\bar X'_{u_2}h'(t)$, לכן ש $h\geq 0$

- וגם $h'(0)\geq 0$, אבל אם $h'(0)=0$ אז כלומר $v\in T_p(\partial M)$. לכן $h'(0)>0$, כלומר $\beta>0$, כנדרש.

* בדרך לשלילה הנחנו $v\in T_p(M)\setminus T_p(\partial M)$.

ס.ל.ת.