תרגיל 9

.

1. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

מחישוב שנחסוך לכם: הפ"א של A הוא $p_A(\lambda)=\lambda^4$. שלשו את A. כלומר מצאו P הפיכה כך ש $P^{-1}AP$ משולשית.

2.

(א) מצא פולינום מינימאלי ל

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times 3}$$

(ב) הוכח כי למטריצות צמודות יש אותו פולינום מינימאלי. (A,B מטריצות צמודות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP=B$)

(ג) תהא

$$A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{(s+t)\times(s+t)}$$

מטריצה כך ש $B\in\mathbb{F}^{s\times s},\ C\in\mathbb{F}^{t\times t}$. נסמן $m_A(\lambda),m_B(\lambda),m_C(\lambda)$ את הפולינום המינימאלי של A,B,C בהתאמה. הוכיחו או הפריכו

$$m_A(\lambda)=m_B(\lambda)\cdot m_C(\lambda)$$

ד) נגדיר

$$J_n(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}$$

בלוק זורדן מגודל n עם 0 על האלכסון. (למשל $J_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_1(0)=(0)$)

i. הוכיחו כי $J_n(0)$ מטריצה נילפוטננית מסדר n. [תזכורת: מטריצה A היא נילפוטננית מסדר k אם $A^k=0$ ואילו $A^{k-1}\neq 0$]

ii. מצא פ"א ופ"מ של $J_n(0)$:

בהצלחה!