פתרון תרגיל בית 11 – מופשטת 1

שאלה 1

הוכיחו שכל חבורה מסדר 120 אינה פשוטה.

פתרון

בכל חבורה מסדר $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, n_5 מחלק את 24 ושקול ל-1 מודולו 5, ולכן הוא שווה ל-1 או ל-6. נניח בשלילה שהחבורה פשוטה, ולכן $n_5 = 6$ ולכן $\left[G : N_G\left(P_5\right)\right] = 6$ ולכן לפי העידון של משפט קיילי יש שיכון $G \to S_6$. משיקולים זהים לאלה שעשינו בתרגול מתקיים שיש שיכון $G \to A_6$. כעת, מתקיים $\left[A_6 : G\right] = 3$. לפי העידון של משפט קיילי קיים שיכון $A_6 \to S_3$ וזאת סתירה (סדרים של החבורות הללו אינם מאפשרים שיכון זה).

מש"ל

שאלה 2

הוכיחו כי לכל חבורה $|G| = pq$ עבור $p > q$ ראשוניים, אם $p \not\equiv 1 \left(\bmod q\right)$ אזי G ציקלית.

פתרון

תהי Q תת חבורת q-סילו, ותהי P תת חבורת p-סילו. קל לבדוק שהן נורמליות (מכיוון ש- $n_q = n_p = 1$). החיתוך שלהן טריוויאלי. נראה שהמכפלה שלהן נותנת את כל G. נסמן $H = PQ$ (כמכפלה ישרה פנימית). מכיוון ש- $P, Q \lhd G$ מתקיים גם $P, Q \lhd H$ ומכיוון שחיתוכן ריק נקבל $H \cong P \times Q$. לכן $|H| = |P \times Q| = pq$ ולכן $|PQ| = pq$ ומכאן $PQ = G$. לסיכום, G היא מכפלה ישרה של שתי תתי חבורות הסילו שלה. מכאן $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$ ולכן ציקלית.

- שימו לב שניתן לפתור שאלה זו גם דרך טכניקה של ספירת איברים (כפי שעשינו בתרגול).
- דרך נוספת: למצוא איבר מסדר pq דרך הטענה על שני איברים מתחלפים שיוצרים תתי חבורות זרות.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

הוכיחו שאם כל חבורות סילו של G הן נורמליות, אז היא מכפלה ישרה שלהן.

<u>הערה</u>: הגדרנו בכתה מתי חבורה היא מכפלה ישרה של שתי ת"ח. ההגדרה לכל מספר סופי: חבורה היא מכפלה ישרה של כמה תת-חבורות, אם כולן נורמליות, החבורה שווה למכפלה שלהן, וכל אחת מהן נחתכת באופן טריוויאלי עם המכפלה של כל האחרות.

<u>פתרון</u>

נניח $|G| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ ולכל $1 \le i \le r$ תהי T_i ת"ח p_i סילו נורמלית (ולכן היחידה מסדרה). נראה ש G מכפלה ישרה (פנימית) של תתי החבורות T_i.

הנורמליות כבר נתונה ולכן נותר לבדוק רק את התכונות האחרות.

<u>למה</u>

אם $G \triangleright A_1,...,A_n$ תת חבורות נורמליות מסדרים זרים בזוגות. אז $|A_1 \cdot ... \cdot A_n| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_n|$.

<u>הוכחה</u>

באינדוקציה על n. הטענה טריוויאלית עבור $n=1$. היא נכונה עבור $n=2$ מכיוון ש $|A_1 A_2| = \frac{|A_1| \cdot |A_2|}{|A_1 \cap A_2|}$ לפי משפט איזומורפיזם שני. נניח שהטענה נכונה ל-n. נוכיח נכונות ל-$n+1$. הסדר של $A_1 \cdot ... \cdot A_n$ שווה למכפלת הסדרים לפי הנחת האינדוקציה ולכן הוא זר לסדר של A_{n+1}. לפי המקרה $n=2$ נובע מכאן ש- $|A_1 \cdot ... \cdot A_n \cdot A_{n+1}| = |A_1 \cdot ... \cdot A_n| \cdot |A_{n+1}| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|$.

מש"ל למה

לכל i נסמן ב-S_i את המכפלה $\prod_{j \ne i} T_j$. מתקיים ש-S_i היא תת חבורה (כמכפלה של תתי חבורות נורמליות), ונרצה כעת לבדוק מהו הסדר שלה. לפי הלמה סדרה הוא $\frac{|G|}{p_i^{k_i}}$. לכן החיתוך $S_i \cap T_i = \{1_G\}$ (שכן הסדרים זרים). מכאן מקבלים את ההגדרה של מכפלה ישרה פנימית.

מש"ל

שאלה 4

א. תהא G חבורה עם: 20,52 או 175 איברים. הוכיחו ש G לא פשוטה.
פתרון

אלה הן חבורות מסדר p^2q והראינו בכיתה שחבורות אלה אינן פשוטות.

ב. הוכיחו או הפריכו: אין חבורה פשוטה מסדר 125.
פתרון
$125=5^3$. זוהי חבורת p ולכן המרכז שלה אינו טריוויאלי. אבל המרכז הוא תת-חבורה נורמלית ולכן יש תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית והחבורה אינה פשוטה.

ג. תהא G חבורה מסדר 1645 או 9797. הוכיחו ש G ציקלית.
פתרון

לגבי 9797:

9797=97*101 ולכן אם G חבורה מסדר 9797 אז ע"פ המשפט על חבורות מסדר pq, G ציקלית.

לגבי 1645:

1645 = 5*7*47. ניתן לראות ש – $n_{47}=n_7=n_5=1$. שלוש תתי החבורות הללו הן ציקליות ונורמליות. נסמן: $H_{47}=\langle c\rangle$,$H_7=\langle b\rangle$,$H_5=\langle a\rangle$. נציג כעת מקרה פרטי של הדיון שעשינו בהוכחת שאלה 3 (ואולי זה יבהיר אותה קצת יותר ☺):

<u>טענה</u>: היוצרים של שלוש תתי החבורות הנ"ל מתחלפים בינהם.

<u>הוכחת הטענה</u>: נראה את זה עבור שני יוצרים (והשאר באותו אופן).
מתקיים:

$aba^{-1}b^{-1}=\left(aba^{-1}\right)b^{-1}\in H_7$ כי H_7 נורמלית. $aba^{-1}b^{-1}=a\left(ba^{-1}b^{-1}\right)\in H_5$ כי H_5 נורמלית. לכן, משיקולי סדרי החבורות, נקבל $aba^{-1}b^{-1}=1$, ז"א $ab=ba$.
מש"ל טענה.

כעת, יש לנו שלושה איברים בחבורה שמתחלפים בינהם וכן הסדרים שלהם זרים, אזי לפי טענה שהוכחתם בשיעורי הבית מתקיים:
$o\left(a\cdot b\cdot c\right)=lcm\left(o\left(a\right),o\left(b\right),o\left(c\right)\right)=1645$ ולכן $\langle a\cdot b\cdot c\rangle=G$ והחבורה היא ציקלית.

ד. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 15,16,17 היא אבלית.
פתרון

17- ראשוני ולכן כל חבורה מסדר זה היא ציקלית, ולכן אבלית.

16 – לא נכון. D_8 היא מסדר 16 אך היא לא אבלית.

15- מתקיים $5 \neq 1 (\bmod 3) \quad \wedge \quad 15 = 3 \cdot 5$ ולכן החבורה ציקלית ולכן אבלית.

ה. הוכיחו שחבורה מסדר 42 אינה פשוטה.

פתרון

קל לבדוק שמתקיים $n_7 = 1$ ולכן יש חבורת 7-סילו נורמלית.

ו. הוכיחו שחבורה מסדר 130 אינה פשוטה, ומצאו חבורה לא אבלית מסדר זה.

פתרון

קל לבדוק ש- $n_{13} = 1$ ולכן יש חבורת 13-סילו נורמלית. מכאן החבורה אינה פשוטה. דוגמא לחבורה לא אבלית, אינה פשוטה מסדר 130: $D_{13} \times \mathbb{Z}_5$.

ז. תהא G חבורה. הוכיחו שלא קיימת תת חבורה p-סילו H כך ש- $[G : N_G(H)] = 2$.

פתרון

נניח בשלילה שקיימת תת חבורה p-סילו H כך ש- $[G : N_G(H)] = 2$. לפי משפט – $n_p = [G : N_G(H)]$ ולכן $n_p = 2$. מצד שני – $n_p \equiv 1 (\bmod p)$, כלומר $2 - 1 = 1 \equiv 0 (\bmod p)$ וזאת, כמובן, סתירה.

ח. הוכיחו שאין חבורה פשוטה מסדר 150.

פתרון

בדומה לשאלה הראשונה. נניח בשלילה שקיימת חבורה פשוטה G מסדר 150. מתקיים $n_5 \in \{1, 6\}$. מכיוון שהחבורה פשוטה, $n_5 = 6$ ולכן $[G : N_G(P_5)] = 6$. מכאן קיים שיכון של G לתוך S_6, ומכיוון שהחבורה פשוטה, השיכון הוא לתוך A_6. זאת סתירה, שכן 150 לא מחלק את $\frac{6!}{2}$.

ט. הוכיחו שחבורה מסדר $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ היא ציקלית.

פתרון

קל לבדוק ש- $n_7 = n_{11} = n_{13} = 1$ ולכן משאלה 3 מקבלים את הדרוש.

מש"ל

שאלה 5

א. הוכיחו: תהי K תת חבורת p סילו של G, ותהי $H \lhd G$. אזי $H \bigcap K$ היא תת חבורת p סילו של H.

ב. תנו דוגמא נגדית במקרה ש- H אינה נורמלית.

פתרון

א. ראשית הכוונה היתה ש $p||H|$. אחרת אין כלל תת חבורת p סילו ל-H.

סדרי כל האיברים, פרט ליחידה, ב- $H \bigcap K$ הם חזקות של p, שכן סדר כל איבר ב- $H \bigcap K$ מחלק את הסדר של K. לכן $H \bigcap K$ חבורת p. נראה שכל חבורת p שהינה ת"ח של H מוכלת בצמוד של $H \bigcap K$ כלומר בחבורה מהצורה $g\left(H \bigcap K\right)g^{-1} \cong H \bigcap K$ עבור איזשהו $g \in G$. מכאן נסיק שתת החבורה $H \bigcap K$ היא תת חבורת p מקסימלית של H וש- $H \bigcap K$ היא תת חבורת p-סילו של H. לצורך זה תהי M תת חבורת p של H כלשהי. אזי היא בפרט תת חבורת p של G. כעת, K תת חבורת p-סילו של G ומכאן קיים $g \in G$ כך ש $M \subseteq gKg^{-1}$. מצד שני $H \lhd G$ ולכן $M \subseteq H = gHg^{-1}$. בסה"כ נקבל ש $M \subseteq gHg^{-1} \cap gKg^{-1} = g(H \cap K)g^{-1}$ כדרוש.

ב. תהי $K = \left\langle \tau \right\rangle$, $G = D_3$ תת חבורת 2-סילו של G ותהי $H = \left\langle \tau\sigma \right\rangle = \left\{ id, \tau\sigma \right\}$.

אזי H בעצמה תת חבורת 2-סילו של G אבל $H \bigcap K$ היא טריוויאלית.

מש"ל

שאלה 6

תהי $N \lhd G$ ויהי $f: G \to G/N$ ההומומורפיזם הטבעי. (הכל סופי). הוכיחו שהתמונה של כל תת חבורת p-סילו של G, היא תת חבורת p-סילו של G/N (שימו לב שהתמונה היא PN/N).

פתרון

ניתן להניח שמתקיים $|G| = p^k r, |N| = p^s t$ כאשר $p^{s+1} \nmid |N|, \quad p^{k+1} \nmid |G|$ וכן $s \le k$ ו $r | t$. כעת, תהי P ת"ח p-סילו של G אזי סדרה הוא p^k. מתקיים:

$\left|\frac{G}{N}\right|=\frac{|G|}{|N|}=p^{k-s}\frac{r}{t}$. מ"ל ש- $\left|\frac{PN}{N}\right|=p^{k-s}$. עפ"י משפט האיזומורפיזם השני $\left|\frac{PN}{N}\right|=\left|\frac{P}{P\cap N}\right|=\frac{|P|}{|P\cap N|}=\frac{p^k}{|P\cap N|}$. כעת, עפ"י שאלה 5 ידוע ש- $P\bigcap N$ היא תת חבורת p-סילו של N ולכן $|P\cap N|=p^s$ שכן $|N|=p^s t$. לכן, $\left|\frac{PN}{N}\right|=\left|\frac{P}{P\cap N}\right|=\frac{|P|}{|P\cap N|}=\frac{p^k}{|P\cap N|}=\frac{p^k}{p^s}=p^{k-s}$ כדרוש.

מש"ל

<u>בונוס</u>

הוכיחו שלכל חבורת סילו H מתקיים $N_G\left(N_G\left(H\right)\right)=N_G\left(H\right)$.

<u>פתרון</u>

ידוע שלכל $A\le G$ מתקיים $A\triangleleft N_G\left(A\right)$ ובפרט $A\subseteq N_G\left(A\right)$. אם ניקח $A=N_G\left(H\right)$ נקבל $N_G\left(H\right)\subseteq N_G\left(N_G\left(H\right)\right)$. נראה כעת את ההכלה בכיוון ההפוך.

<u>למה</u> (קל מאוד להוכיחה, עשו זאת!)

תהא H תת חבורה p-סילו של G. הוכיחו ש-H היא תת חבורה p-סילו <u>יחידה</u> של $N_G\left(H\right)$.

כעת, יהי $y\in N_G\left(N_G\left(H\right)\right)$, כלומר $yN_G\left(H\right)y^{-1}=N_G\left(H\right)$. צריך להראות ש- $y\in N_G\left(H\right)$, כלומר $yHy^{-1}=H$. $H\subseteq N_G\left(H\right)$ ולכן $yHy^{-1}\subseteq yN_G\left(H\right)y^{-1}=N_G\left(H\right)$. מכיוון ש-$H$ היא תת חבורה p סילו יחידה של $N_G\left(H\right)$, וגם $yHy^{-1}\le N_G\left(H\right)$ ומתקיים $yHy^{-1}\cong H$, נקבל $yHy^{-1}=H$.

<u>הערה לתרגיל</u>

אם H היא לא תת חבורה p סילו אזי הטענה אינה בהכרח נכונה. דוגמא נגדית: $H=\left\langle(12)\right\rangle\le S_4$.

מש"ל