פיתרון בוחן שלישי בדידה 2, 83־118, סמסטר ב, תשע"ו

י"ג סיון, 19/06/2016

מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: בבוחן 3 שאלות, **ענו על 2 שאלות בלבד מתוכן**. כל שאלה מזכה ב־50 נקודות.
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: 45 דקות.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

שאלה	ציון
1	
2	
3	
סה"כ	

בהצלחה!

1. כמה מחרוזות בינאריות מאורך n יש שאינן מכילות את המחרוזות $010, 101$? הדרכה: מצא נוסחת נסיגה ופתור אותה כפי שלמדנו בכיתה. (50 נקודות)

פיתרון נסמן ב־a_n את מספר המחרוזות "החוקיות" מאורך n. נסמן ב־b_n את מספר המחרוזות ה"חוקיות" מאורך n המתחילות ב־0. נשים לב, שמטעמי סימטריה זהו גם מספר המחרוזות החוקיות מאורך n המתחילות ב־1, ולכן נקבל: $a_n = 2b_n$ (לכל כזו המתחילה ב־0 ניתן להתאים מחרוזת חוקית המתחילה ב־1 ע"י היפוך כל הביטים). נחשב את b_n:

המחרוזות החוקיות מאורך n המתחילות ב־0 מחולקות לשתי תתי קבוצות זרות:

א. כל המחרוזות החוקיות מאורך $n-1$ המתחילות ב־0 (כי ככה יש שני אפסים בהתחלה וזה חוקי).

ב. כל המחרוזות החוקיות מאורך $n-2$ המתחילות ב־1 (ולפניהם יש 01, ולכן זו האפשרות השניה לחוקיות).

ולכן

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \Rightarrow a_n = 2b_n = 2b_{n-1} + 2b_{n-2} = a_{n-1} + a_{n-2}$$

תנאי ההתחלה הם: $a_1 = 2, a_2 = 4$. מכאן פשוט מוצאים את שורשי הפולינום האופייני, $x^2 - x - 1$, וממשיכים כפי שלמדנו.

2. n אנשים נכנסים למסעדה ולכל אחד מהם מעיל ועניבה. בסיום הארוחה הם ממהרים לעזוב וכל אחד מהם לוקח מעיל ועניבה כלשהם. מה מספר האפשרויות שבהן אף אחד מהם לא יקבל בחזרה הן את מעילו והן את עניבתו (ייתכן שמישהו יקבל את המעיל או העניבה, אך לא את שניהם)? (50 נקודות)

פיתרון

נקרא לבחירה אקראית של מעיל ועניבה "ערבוב". נסמן כמה קבוצות שתהיינה הרכיבים הדרושים להוכחה:

(א) A_i תהיה קבוצת האפשרויות שלקוח i יקבל את העניבה שלו והמעיל שלו.

נשים לב שאחרי שקבענו לאן הולך כובע ועניבה אחת בחירת השאר היא ערבוב של העניבות והמעילים ולכן $|A_i| = ((n-1)!)^2$.

i. U תהיה קבוצת האפשרויות לקבלת מעיל ועניבה (קבוצה אוניברסלית).

נשים לב שכל אפשרות היא בעצם ערבוב של העניבות ושל המעילים ולכן $|U| = (n!)^2$.

ii. $A_i \cap A_j$ קבוצת האפשרויות שלקוחות j, i יקבלו, כל אחד, את העניבה שלו והמעיל שלו.

קבענו שתי עניבות ושני מעילים, ונותר לקבוע את השאר. זה בעצם ערבוב של העניבות והמעילים של השאר, כלומר: $|A_i \cap A_j| = ((n-2)!)^2$.

iii. באופן דומה, נבדוק מה גודלה של קבוצת האפשרויות ש־k לקוחות ספציפיים יקבלו את העניבה והמעיל שלהם.

קבענו k עניבות ו־k מעילים, ונותר לקבוע את השאר. זה בעצם ערבוב של עניבות ומעילים של השאר, כלומר: $((n-k)!)^2$.

רוצים שאף אחד לא יקבל גם מעיל וגם עניבה ולכן לסיכום בעזרת עקרון ההכלה־הדחה נקבל:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$
$$= |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots$$
$$= \binom{n}{0}\cdot (n!)^2 - \binom{n}{1}\cdot ((n-1)!)^2 + \binom{n}{2}\cdot((n-2)!)^2 - \binom{n}{3}\cdot((n-3)!)^2 + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}((n-k)!)^2 + ... = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i$$

3. פתור את נוסחת הנסיגה הבאה: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^{n-1}, a_0 = 1, a_1 = 3$. (50 נקודות)

פיתרון

התוספת הלא הומוגנית היא $\frac{1}{2} \cdot 2^n$. לפולינום האופייני (כך קוראים לו) של הנוסחא, $x^2 - x - 2$, יש שני שורשים: $2, -1$. כיוון ש־2 הוא שורש נצפה בפיתרון לתוספת של $\gamma \cdot n \cdot 2^n$. איך נמצא את γ? נסמן $a_n = \gamma n 2^n$, ונציב בנוסחא המקורית:

$$\gamma n 2^n = \gamma(n-1)2^{n-1} + 2\gamma(n-2)2^{n-2} + 2^{n-1}$$

נחלק ב־2^{n-1} ונקבל:

$$2n\gamma = \gamma(n-1) + \gamma(n-2) + 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{3}$$

כעת נפתור את הנוסחא ההומוגנית: צורת הפיתרון של הנוסחא ההומוגנית היא $a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$, ולכן צורת הפיתרון הכללי תהיה

$$a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n + \frac{1}{3} \cdot n 2^n$$

כדי למצוא את α, β, נציב בפיתרון הכללי $0, 1$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - \beta + \frac{2}{3} = 3 \end{cases}$$

ונקבל $\alpha = \frac{10}{9}, \beta = -\frac{1}{9}$. ולסיכום נקבל

$$a_n = \frac{10}{9} \cdot 2^n - \frac{1}{9} \cdot (-1)^n + \frac{1}{3} \cdot n \cdot 2^n$$