פתרון תרגיל בית 8

שאלה 1

נראה כי לכל $n>1$, $\mathbb{R}^n$ לא הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$. אם נזרוק נקודה מ- $\mathbb{R}$ נקבל מרחב שאינו קשיר. אמנם, עבור $b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{R}\setminus\{b\}=(-\infty,b)\cup(b,\infty)$. לעומת זאת לכל $n>1$, אם נזרוק נקודה מ $\mathbb{R}^n$ נקבל מרחב קשיר מסילתית ולכן קשיר.

הסבר: $\mathbb{R}^n-\{a\}$ קשיר מסילתית לכל $n>1$ ולכל $a\in\mathbb{R}^n$. נניח $x,y\in\mathbb{R}^n-\{a\}$ אם הקו הישר המחבר ביניהן לא עובר דרך a אז המסילה הסטנדרטית מקשרת בין x ו- y גם ב- $\mathbb{R}^n-\{a\}$.

אחרת, מכיוון ש $n>1$ ברור שקיים ישר שונה (מהישר המחבר x ו- y) שעובר דרך x. ניקח נקודה הנמצאת עליו ושונה מ x ונסמנה z. ברור שהמסילה הסטנדרטית מקשרת בין x ו- z (a לא נמצאת על ישר זה). כמו כן, a לא נמצאת על הישר המחבר בין z ו- y ולכן קיימת מסילה (הסטנדרטית) המחברת בין y ל- z. אם יש מסילה ב $\mathbb{R}^n-\{a\}$ בין x ל y וכן מסילה בין y ל z אז יש גם מסילה בין x ל- z (שרשור של המסילות). היחס הוא יחס שקילות ובפרט טרנזיטיבי.

כעת, אם היה קיים הומיאו' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אז גם $f|_{\mathbb{R}^n\setminus\{a\}}:\mathbb{R}^n\setminus\{a\}\to\mathbb{R}\setminus\{f(a)\}$ היה הומיאו'. אבל כפי שתיארנו המרחב השמאלי קשיר ואילו הימני אינו קשיר, בסתירה לכך שהומיאומורפיזם שומר על קשירות.

שאלה 2

א. טענת עזר: $C\subseteq D \Leftarrow cl(C)\subseteq cl(D)$.

הוכחת טענת עזר: $C\subseteq D$ לכן מכיוון ש $D\subseteq cl(D)$ נקבל ש $C\subseteq cl(D)$. כעת, $cl(D)$ סגורה המכילה את C ומכיוון ש $cl(C)$ הסגורה **המינימלית** המכילה את C נקבל ש $cl(C)\subseteq cl(D)$. מש"ל טענת עזר.

$A\cap B\subseteq A$ לכן עפ"י טענת העזר נקבל ש $cl(A\cap B)\subseteq cl(A)$ ובאופן דומה מקבלים ש- $cl(A\cap B)\subseteq cl(B)$ ולכן בסה"כ $cl(A\cap B)\subseteq cl(A)\cap cl(B)$.

ב.נתבונן במרחב המטרי $\mathbb{R}$ ויהיו $\begin{matrix} A=(0,1) \\ B=(1,2) \end{matrix}$ אזי $cl\left(A\cap B\right)=\varnothing \Leftarrow A\cap B=\varnothing$

$\begin{matrix} cl\left(A\right)=[0,1] \\ cl\left(B\right)=[1,2] \end{matrix}$ ולכן $cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)=\left\{1\right\}$ ומתקיים

$$\left\{1\right\}=cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)\not\subset cl(A\cap B)=\varnothing$$

ג. הטענה: $\operatorname{int}\left(A\right)\cup\operatorname{int}\left(B\right)\subseteq\operatorname{int}\left(A\cup B\right)$

הוכחה: $A\subseteq A\cup B$ וגם $\operatorname{int}\left(A\right)\subseteq A$ (לפי ההגדרה של הפנים) ולכן $\operatorname{int}\left(A\right)\subseteq A\cup B$.
אך $\operatorname{int}\left(A\right)$ זו קבוצה פתוחה שמוכלת ב- $A\cup B$ ולכן $\operatorname{int}\left(A\right)\subseteq\operatorname{int}\left(A\cup B\right)$. באותו אופן מראים ש- $\operatorname{int}\left(B\right)\subseteq\operatorname{int}\left(A\cup B\right)$ וזה מסיים את ההוכחה.

<u>שאלה 3</u>

$f:X\to Y$ הומיאו' ובפרט פונקציה פתוחה ולכן $f(\operatorname{int}(A))$ פתוחה. כמו כן $\operatorname{int}(A)\subseteq A$ ולכן $f\left(\operatorname{int}(A)\right)\subseteq f\left(A\right)$. בסה"כ נקבל ש $f(\operatorname{int}(A))$ פתוחה המוכלת ב $f\left(A\right)$ ולכן $f\left(\operatorname{int}(A)\right)\subseteq\operatorname{int}\left(f\left(A\right)\right)$. נוכיח את ההכלה ההפוכה ונקבל שוויון.

באופן דומה מכיון ש f הומיאו' אז f^{-1} פתוחה ומכאן $f^{-1}\left(\operatorname{int}(B)\right)\subseteq\operatorname{int}\left(f^{-1}\left(B\right)\right)$ לכל $B\subseteq Y$. נציב $B=f(A)$ ונקבל $f^{-1}\left(\operatorname{int}(f(A))\right)\subseteq\operatorname{int}\left(A\right)$. נפעיל f על שני האגפים ונקבל ש

$\operatorname{int}(f(A))\subseteq f\left(\operatorname{int}\left(A\right)\right)$. בסה"כ $f\left(\operatorname{int}(A)\right)=\operatorname{int}\left(f\left(A\right)\right)$

<u>שאלה 4</u>

א. לא קיים המיאו' שכן העוצמות של המרחבים שונות.
ב. לא קיים הומיאו' בין X ו- S^1, כאשר $X=$ תת-מרחב של R^2 בצורת 8 , $S^1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ שכן, הוצאת הנקודה האמצעית ב8 המחברת בין שני המעגלים תיצור שני מרכיבי קשירות והמרחב יהיה <u>לא קשיר</u> בעוד שהוצאת כל נקודה מ S^1 תיצור מרחב הומיאומורפי ל $\mathbb{R}$ שהוא <u>קשיר</u> (הוא קמור וקשיר מסילתית) פורמאלית , נניח בשלילה שיש הומיאומורפיזם $f:S^1\to X$. אזי בפרט f על ולכן

אם נסמן ב a את הנקודה האמצעית ב8 המחברת בין שני המעגלים נקבל שקיים $b\in S^1$ כך ש $f(b)=a$. אם $f:S^1\to X$ הומיאו' אז גם $f\big|_{S^1\setminus\{b\}}:S^1\setminus\{b\}\to X\setminus\{a\}$ הומיאומורפיזם. אך זה לא אפשרי שכן כפי שציינו לעיל, התחום קשיר בעוד שהטווח אינו קשיר והומיאומורפיזם שומר על קשירות.

ג. המרחבים אינם הומיאומורפיים שכן הומאימורפיזם מעביר מרכיב קשירות למרכיב קשירות (הוכחנו זאת בתרגול) . בשני המרחבים שני מרכיבי קשירות. לו היה קיים הומיאו' אז התמונה של מרכיב הקשירות $\{0\}$ היתה $(2,5)$ או $(7,8)$ (אלה מרכיבי הקשירות של המרחב השני). אבל זה כמובן בלתי אפשרי וסותר את החד-ערכיות של הפונקציה.

<u>שאלה 5</u>

א. נוכיח קודם טענת עזר:

<u>טענה:</u> תהי $f:X\to Y$ חח"ע ועל אזי f פתוחה אם ורק אם f סגורה.

<u>הוכחת טענת עזר:</u> $f:X\to Y$ חח"ע ועל ולכן לפי שאלה 6 בתרגיל 3 (הסתכלו בפתרון) לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f(A^C)=\left(f(A)\right)^C$. כעת נניח ש f פתוחה ונראה ש f סגורה. תהי $A\subseteq X$ סגורה אזי A^C פתוחה ב X ומכיון ש f פתוחה נקבל ש $f(A^C)$ פתוחה. אבל $f(A^C)=\left(f(A)\right)^C$ ומכאן $\left(f(A)\right)^C$ פתוחה ולכן $f(A)$ סגורה. קיבלנו ש f סגורה. באופן דומה מוכיחים שאם f סגורה אז f פתוחה (תחת ההנחה ש f חח"ע ועל).

נחזור להוכחת התרגיל. מטענת העזר אפשר להניח ש f פתוחה. כדי להוכיח ש Y האוסדורף ניקח $y_1\neq y_2\in Y$. $f:X\to Y$ על ולכן קיימות $x_1\neq x_2\in X$ כך ש $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$. X האוסדורף ולכן קיימות U סביבה של x_1, V סביבה של x_2 כך ש $U\cap V=\varnothing$. בשל העובדה ש f פתוחה נקבל ש $f(U),f(V)$ סביבות של y_1,y_2 בהתאמה. לבסוף $f(U),f(V)$ זרות. אמנם נניח בשלילה ש $f(U)\cap f(V)\neq\varnothing$ אזי קיימת $z\in f(U)\cap f(V)\neq\varnothing$. לכן, קיימות $x\in U,\, y\in V$ כך ש $f(x)=f(y)=z$. אבל f חח"ע מכאן $x=y\in U\cap V$. בסתירה לכך ש $U\cap V=\varnothing$. מצאנו את ההפרדה הדרושה ומכאן Y האוסדורף.

ב. יהיו $x_1 \neq x_2 \in X$. f חח"ע ומכאן $f(x_1) \neq f(x_2) \in Y$. Y האוסדורף ולכן קיימות U,V סביבות זרות של $f(x_1), f(x_2)$ בהתאמה. f רציפה ולכן $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ סביבות של x_1, x_2 והן זרות שכן $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

שימו לב:סעיף ב' נכון גם אם f אינה על (לא נעזרנו בנתון זה כלל בהוכחה).

<u>שאלה 6</u>

נניח שהמרחב האוסדורף ונניח בשלילה שקיים $x \in X$, כך שחיתוך כל הסגורות המכילות סביבות של x, מכיל איבר y השונה מ x. $x \neq y$ לכן מתכונת האוסדורף קיימות U,V פתוחות וזרות כך ש $x \in U, y \in V$. כעת $U \cap V = \varnothing$. מכאן $U \subseteq V^C$. נקבל ש V^C סגורה המכילה סביבה של x (כי U סביבה של x) ומצד שני $y \notin V^C$. בסתירה לכך ש y שייכת לחיתוך כל הסגורות המכילות סביבות של x.

בכיוון ההפוך: נוכיח האוסדורף. יהיו $x \neq y \in X$. מכיון שלכל $x \in X$ חיתוך כל הסגורות המכילות סביבות של x הוא בדיוק $\{x\}$, נקבל שקיימת סגורה F וסביבה U של x כך ש $U \subseteq F$ וגם $y \notin F$. אזי F^C היא סביבה של y שזרה ל U (כי F^C זרה ל F ו $U \subseteq F$) שהינה סביבה של x.

<u>שאלת בונוס</u>

תהיינה $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ נראה שיש מסילה ביניהן. ברור שאם $x = y$ קיימת מסילה (ניתן לקחת מסילה קבועה). נניח כעת $x \neq y$. נסתכל על קבוצת כל הישרים B_x שעוברים דרך x ודרך נקודה השייכת ל A. מהנתון $|A| \leq \aleph_0$. מכיון שישר נקבע עפ"י שתי נקודות בצורה יחידה נקבל ש $|B_x| \leq \aleph_0$.

מכיון שעוצמת כל הישרים העוברים דרך x היא $\aleph$ (נובע מהעוצמה של קבוצת השיפועים האפשריים) נקבל שבהכרח קיים ישר שעובר דרך x וגם אין עליו אף נקודה מ A. נסמן ישר כזה ב l_x. מסיבות דומות קיים ישר l_y שעובר דרך y, אין עליו אף נקודה מ A ובנוסף הוא אינו מקביל (או מתלכד) עם l_x (שימו לב שיש רק ישר אחד שעובר דרך y ומקביל, או מתלכד עם l_x). לכן l_x ו l_y נחתכים בנקודה שנסמנה z.

הפונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2\setminus A$ המעתיקה את $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ על הקטע המחבר את x ל z

$\left(f(0)=x, f\left(\frac{1}{2}\right)=z\right)$ ואת הקטע $\left[\frac{1}{2},1\right]$ על הקטע המחבר את z ל y

$\left(f(1)=y, f\left(\frac{1}{2}\right)=z\right)$, היא המסילה הדרושה ב $\mathbb{R}^2\setminus A$. למעשה מדובר כאן על שרשור שתי מסילות סטנדרטיות. הבעיה היתה להראות ששתי המסילות הסטנדרטיות האלו הן ב $\mathbb{R}^2\setminus A$ ואת זה הוכחנו לעיל משיקולי עוצמות.