תשובה מאיתי מועלם
התשובה לשאלה הראשונה ולשנייה היא כעוצמת קבוצת החזקה
הוכחה: (ההוכחה מסתמכת על אקסיומת הבחירה)
נגדיר את פעולת העצרת של עוצמה כמספר הפונקציות החח"ע ועל מקבוצה לעצמה (ההגדרה היא אותה הגדרה במקרה הסופי (תרגיל לקורא))
קבוצת כל הפונקציות שהן חח"ע ועל מהקבוצה לעצמה היא תת קבוצה של הקבוצה בחזקת עצמה ומפני שהיא אינסופית עוצמת הקבוצה בחזקת עצמה זה 2 בחזקת העוצמה שלה ולכן יוצא לנו שקבוצת החח"ע ועל היא קטנה שווה ל-2 בחזקת העוצמה (מעכשיו נקרא לעוצמה K
)מפני שהקבוצה (נקרא לה $) אינסופית אז המכפלה הקרטיזת שלה עם הקבוצה {0,1} היא עדין אותה עוצמה לכן נסתכל על הפונקציות החח"ע ועל מהקבוצה הזאת לעצמה
יש לה תת קבוצה # של כל הפונקציות שלוקחות כל איבר a ב-$ עם המספר 0 או 1 ומתאימות אותו לאותו הזוג או לזוג עם המספר ההפוך מפני שזאת תת קבוצה אז עוצמת כל הפונקציות ההחח"ע ועל גדולה או שווה מתת הקבוצה הזאת .דוגמה (a,1) ישלחו או לעצמו או ל-(a,0) (במקרה השני ישלחו גם את (a,0) ל-(a,1))
אפשר לראות שב-# אפשר לסווג כל פונקציה כך :לכל פונקציה ניתן תת קבוצה L של$
כך שהיא הופכת אפס לאחד ואחד לאפס בזוגות אלה רק כאשר a שייך ל-L
לכן יש פונקציה חח"ע ועל בין קבוצת החזקה של $ ל# שנותנת לכל תת קבוצה של$ את הפונקציה לפי הסיווג הקודם (בדיוק כמו ההוכחה שעוצמת קבוצת החזקה זה שתיים בחזקת העוצמה בעזרת פונקציה מציינת)
לכן # שווה בעוצמתו לעוצמת 2 בחזקת העוצמה של $ לכן קבוצת כל החח"ע ועל מ$ ל$ גדולה שווה לעוצמה זו אבל בהתחלה הוכחנו שהיא קטנה שווה לכן לפי משפט קש"ב עוצמת כל החח"ע ועל היא 2 בחזקת |$|
מש"ל