מתמטיקה לכימאים פתרון תרגיל 8

עוזי חרוש ועולא אמארה

תרגיל 1. האם הפונקציות הבאות בת"ל (הורונסקיאן)

1. $f_1(t) = \cos t,\ f_2(t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$

פתרון. נחשב את הורונסקיאן

$$\begin{aligned} W(f_1,f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos t & 4\cos^3 t - 3\cos t \\ \sin t & 12\cos^2 t \sin t - 3\sin t \end{vmatrix} = \\ &= \left(12\cos^2 t\sin t - 3\sin t\right)\cos t - \left(4\cos^3 t - 3\cos t\right)\sin t = \\ & 8\cos^2 t \sin t \neq 0 \end{aligned}$$

לכן $\{f_1, f_2\}$בת"ל

2. $f_1(t) = 3t+5,\ f_2(t) = 9t+15$

פתרון. נחשב את הורונסקיאן

$$\begin{aligned} W(f_1,f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 3t+5 & 9t+15 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \\ &= 9(3t+5) - 3(9t+15) = 0 \end{aligned}$$

לכן $\{f_1, f_2\}$ תל

3. $f_1(t) = t,\ f_2(t) = \frac{1}{t}$

פתרון. נחשב את הורונסקיאן

$$\begin{aligned} W(f_1,f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} t & \frac{1}{t} \\ 1 & -\frac{1}{t^2} \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{t^2}t - \frac{1}{t} = 0 \\ &= -\frac{2}{t} \neq 0 \end{aligned}$$

לכן $\{f_1, f_2\}$ בת"ל

תרגיל 2. מצאו את תנאי נסיגה על מקדמי הטור החזקות של הפתרון המד"ר והביעו את ששת איברים הראשונים בעזרת a_0, a_1 (טורי חזקות)

1. $y'' - y = 0$

פתרון. נציב

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

אם נגזור נקבל

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$$

ואם נגזור פעם נוספת נקבל

$$y''\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}$$

כעת נציב את זה במשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}y''-y=0\\ \Downarrow\\ \textstyle\sum_{n=2}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}\left(n+1\right)\left(n+2\right)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+2}\left(n+1\right)\left(n+2\right)-a_n\right)x^n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+2}\left(n+1\right)\left(n+2\right)-a_n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+2}=\tfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}\end{gathered}$$

2. $2y''+xy'+3y=0$

פתרון. נציב

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

אם נגזור נקבל

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$$

ואם נגזור פעם נוספת נקבל

$$y''\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}$$

כעת נציב את זה במשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}2y''+xy'+3y=0\\ \Downarrow\\ 2\sum_{n=2}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \sum_{n=0}^{\infty}2a_{n+2}n\left(n+1\right)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^n+\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(3a_{n+2}n\left(n+1\right)+a_nn+3a_n\right)x^n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+2}3\left(n+1\right)\left(n+2\right)+a_nn+3a_n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+2}=-\frac{(n+3)a_n}{(n+1)(n+2)}\end{gathered}$$

3. $y''+k^2x^2y=0$ (קשה!!)

פתרון. נציב

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

אם נגזור נקבל

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$$

ואם נגזור פעם נוספת נקבל

$$y''\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}$$

כעת נציב את זה במשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}y''+k^2x^2y=0\\ \Downarrow\\ \sum_{n=2}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}+k^2x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}\left(n+2\right)\left(n+1\right)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}k^2a_nx^{n+2}=0\\ \Downarrow\\ 2a_2+3a_3+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n+2}\left(n+2\right)\left(n+1\right)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}k^2a_nx^{n+2}=0\\ \Downarrow\\ 2a_2+3a_3+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+4}\left(n+4\right)\left(n+3\right)x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}k^2a_nx^{n+2}=0\\ \Downarrow\\ 2a_2+3a_3+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+4}\left(n+4\right)\left(n+3\right)x^{n+2}+k^2a_n\right)x^{n+2}=0\\ \Downarrow\\ a_{n+4}\left(n+4\right)\left(n+3\right)x^{n+2}+k^2a_n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+4}=-\frac{a_nk^2}{(n+4)(n+3)},\ a_2=a_3=0\end{gathered}$$

תרגיל 3. פתרו את המשוואה הבאות: (משוואת אוילר)

1. $x^2y''-3xy'+4y=0$

פתרון. נציב

$$y(x) = x^r$$

ונקבל

$$r(r-1) + -3r + 4 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r^2 - 4r + 4 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1, r_2 = 2$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln|x|$$

2. $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = x^r$$

ונקבל

$$r(r-1) + 3r + 5 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r^2 + 2r + 5 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1, r_2 = -1 \pm 2i$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|)\right)$$

3. $x^2 y'' - xy' + y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = x^r$$

ונקבל

$$r(r-1) - r + 1 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r^2 - 2r + 1 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1, r_2 = 1$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \ln|x|$$

4. $(x-1)^2 y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = (x-1)^r$$

ונקבל

$$r(r-1) + 8r + 12 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r^2 + 7r + 12 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1, r_2 = -3, -4$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y\left(x\right)=C_1\frac{1}{x^3}+C_2\frac{1}{x^4}$$

5. $x^2y''+6xy'-y=0$

פתרון. נציב

$$y\left(x\right)=x^r$$

ונקבל

$$\begin{gathered}r\left(r-1\right)+6r-1=0\\ \Downarrow\\ r^2+5r-1=0\\ \Downarrow\\ r_1,r_2=\tfrac{-5\pm\sqrt{29}}{2}\end{gathered}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y\left(x\right)=C_1\left|x\right|^{\frac{-5+\sqrt{29}}{2}}+C_2\left|x\right|^{\frac{-5-\sqrt{29}}{2}}$$