# תרגיל 13 – לינארית

**1.** תהי $P=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$. חשבו את $P^{20}$.

**2.** קבעו האם ההעתקות הבאות הן העתקות לינאריות..

**2.1** $T:M_{n\times n}(R)\to R$ כך שלכל $A\in M_{n\times n}(R)$ , $T(A)=\det(A)$.

**2.2** $T:C^3\to C^3$ המוגדרת ע"י $T\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+2y-3z\\ x\\ 1\end{pmatrix}$.

**2.3** $T:C^3\to C^3$ המוגדרת ע"י $T\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+2y-3z\\ x+y\\ z\end{pmatrix}$.

**3.** הוכיחו את הטענות הבאות:

**3.1** אם $T:V\to W$ העתקה לינארית אז $\ker(T)$ הוא תת מרחב וקטורי של $V$ ו $\mathrm{Im}(T)$ הוא תת מרחב וקטורי של $W$.

**3.2** אם $T:V\to V$ העתקה לינארית אז $\ker(T)\subseteq ket(T^2)$ ו $\mathrm{Im}(T^2)\subseteq \mathrm{Im}(T)$.

**4.** יהי $V$ מרחב וקטורי ו $U,W\le V$ תתי מרחבים שלו. הוכיחו כי:

**4.1** קיימת הע"ל $T:V\to V$ עבורה $\ker(T)=U$.

**4.2** קיימת הע"ל $T:V\to V$ עבורה $\mathrm{Im}(T)=W$.

**4.3** אם $\dim(U)+\dim(W)=n$ עבור $n=\dim V$ אז קיימת הע"ל $T:V\to V$ כך ש $\ker(T)=U$ ו $\mathrm{Im}(T)=W$.

**5.** יהיו $V,W$ מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה $F$. ותהא $T:V\to W$ הע"ל. הוכיחו כי:

**5.1** אם $\dim(V)<\dim(W)$ אז $T$ אינה על.

**5.2** אם $\dim(V)>\dim(W)$ אז $T$ אינה חח"ע.

**5.3** אם $\dim(V)=\dim(W)$ אז $T$ חח"ע אם ורק אם $T$ על.

**6.** קבעו האם קיימת הע"ל $T$ עם התכונות המתוארות. אם כן, מצאו כזו. אחרת, הוכיחו כי לא קיימת $T$ כנ"ל.

**6.1** $T:R^3\to R^3$ כך ש $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\in\ker(T)$ וכן $\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\in\mathrm{Im}(T)$.

**6.2.** $T: R^3 \to R^4$ כך ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\\-1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $\operatorname{Im}(T)$ ו $\left\{\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $\ker(T)$. (מזכיר לכם משהו? ☺)

**6.3.** $T: R_2[x] \to R^3$ שמעבירה את $R_2[x]$ על $W = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in R^3 : 2x - y + z = 0\right\}$.

**7.** עבור ההעתקה הלינארית $T: R^3 \to R^2$ המוגדרת ע"י $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+2y-z\\y+z\end{pmatrix}$,

**7.1.** מצאו את $\operatorname{Im}(T)$ ואת מימדו.

**7.2.** מצאו את $\ker(T)$ ואת מימדו.

**7.3.** מצאו את המטריצה המייצגת של $T$ לפי הבסיסים הסטנדרטיים. כלומר, מצאו $A \in M_{2\times 3}(R)$ כך שלכל $v \in R^3$ $T(v) = Av$.

**7.4.** מצאו את $C(A)$ ואת מימדו. השוו לתוצאה מסעיף 1.

**7.5.** מצאו את $N(A)$ ואת מימדו. השוו לתוצאה מסעיף 2.

בהצלחה! ☺