פיתרון תרגיל בית 3 במתמטיקה בדידה 2
83־118 סמסטר ב׳ תשע"ט

10 באפריל 2019

1. זהות הקפטן.

(א) הוכיחו את זהות הקפטן:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

i. בדרך אלגברית.

ii. בדרך קומבינטורית.

(ב) השתמשו בזהות שהוכחתם בסעיף הקדם כדי להוכיח את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

<u>פתרון:</u>

א. אלגברית:

$$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

קומבינטורית: נחשב בכמה דרכים ניתן לבחור נבחרת של k שחקנים מתוך קבוצה של n שחקנים, עם קפטן לנבחרת. נעשה זאת בשני אופנים:

בצד שמאל בוחרים תחילה את הנבחרת, ב־$\binom{n}{k}$ אפשרויות, ואז מהנבחרת את הקפטן ב־k אפשרויות, סה"כ: $k\binom{n}{k}$ אפשרויות.

בצד ימין בוחרים תחילה את הקפטן ב־n אפשרויות, ואז את שאר חברי הנבחרת מתוך שאר חברי הקבוצה ב־$\binom{n-1}{k-1}$ אפשרויות. סה"כ: $n\binom{n-1}{k-1}$ אפשרויות.

ב. מזהות הקפטן נקבל $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$ (נסמן שיוויון זה ב־$*$), ולכן:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \underset{0\binom{n}{0}=0}{=} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \underset{*}{=} \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \underset{k'=k-1}{=} n\sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n-1}{k'} = n\cdot 2^{n-1}$$

כאשר בשיוויון האמצעי הוצאנו את n מחוץ לסכום כי הוא לא בתלוי ב־k, ובשיוויון האחרון השתמשנו בנוסחת הבינום עם הצבת $a=b=1$.

2. יהיו $k,m,n \in \mathbb{N}$ כך ש $0 \le m \le k \le n$ הוכיחו:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

(א) בדרך אלגברית.

(ב) בדרך קומבינטורית.

<u>פתרון:</u>

א. נפתח את שני הצדדים ונראה שמגיעים לאותו דבר:

נפתח את צד שמאל ונקבל (ע"י צמצום $k!$ מהמונה והמכנה): $\frac{n!}{m!\cdot(n-k)!\cdot(k-m)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{m!(k-m)!} = \binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

נפתח את צד ימין ונקבל (ע"י צמצום $(n-m)!$ מהמונה והמכנה): $\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} = \frac{n!}{m!\cdot(n-k)!\cdot(k-m)!}$.

ב. שני אגפי הזהות סופרים בכמה דרכים ניתן לבחור מתוך קבוצה של n סטודנטים k סטודנטים למועצה הכללית, ומתוכם m סטודנטים לועד העליון (אפשר להמחיש גם עם ממשלה ואחר כך קבינט מצומצם). אגף שמאל ברור ־ מספר האפשרויות לבחור את הועד, ולכל בחירה של ועד (ולכן זה כפל) יש את מספר האפשרויות לבחור מתוכו את הועד העליון. באגף ימין קודם בוחרים את m הסטודנטים לועד העליון, ולכל אפשרות כזו (ולכן יש כפל) משלימים מתוך $n-m$ הסטודנטים שנותרו את החברים במועצה הכללית.

3.

(א) יהיו $k,n,m \in \mathbb{N}$ כך ש $0 \le k \le n,m$. הוכיחו בדרך קומבינטורית:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

(ב) השתמשו בזהות שהוכחתם בסעיף הקודם, והוכיחו את הזהות הבאה:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

<u>פתרון:</u>

א. שני הצדדים סופרים את מספר האפשרויות לבחור k איברים מקבוצה בת $n+m$ איברים. אגף ימין ברור. אגף שמאל: נסדר את $n+m$ האיברים בסדר שרירותי. כל תת קבוצה בגודל k מכילה איברים מ־n האיברים הראשונים, ובנוסף איברים מ־m האיברים האחרונים. אם היא מכילה i איברים מתוך n הראשונים, אז בהכרח היא מכילה $k-i$ איברים מתוך האחרונים. לכל $0 \leq i \leq k$ ספציפי, יש $\binom{n}{i}$ אפשרויות של תתי קבוצות בגודל i מ־n האיברים הראשונים, ולכל אפשרות כזו יש $\binom{m}{k-i}$ אפשרויות לשאר האיברים מתוך האיברים האחרונים. כיון שמתוך n הראשונים יכולים להיבחר בין 0 ל־k איברים, לכן צריך לסכום על כל האפשרויות הנ"ל בין 0 ל־k.

ב. עבור $n=m=k$ נקבל:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i} \underset{\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}}{=} \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \underset{a}{=} \binom{n+m}{k} = \binom{2n}{n}$$

4. יהיו $k,m,n \in \mathbb{N}$ כך ש $k+m \leq n$ הוכיחו:

$$\binom{n}{k+m} \leq \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m}$$

(א) בדרך אלגברית.

(ב) בדרך קומבינטורית.

פיתרון:

א. נשים לב ש־ $\binom{n}{k+m} = \frac{n!}{(k+m)!(n-k-m)!}$, ומאידך $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{m!(n-k-m)!} = \frac{n!}{k!m!(n-k-m)!}$. לכן, מספקי להוכיח ש־ $k!m! \leq (k+m)!$. נוכיח באינדוקציה:

נשתמש כאן ביחס סדר המילוני על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ונעשה לפיו את האינדוקציה (כלומר הנחת האינדוקציה תהיה נכונות הטענה לכל הזוגות הסדורים הקטנים שווים, לפי יחס זה, מ־ (k,m)). בסיס האינדוקציה הוא $k=m=1$, ואכן מתקיים $1!\cdot 1! = 1 \leq 2 = (1+1)!$. נניח נכונות לכל הזוגות הקטנים מ־$(k,m) > (0,0)$ ונראה נכונות עבור זוג זה. אכן:

$$k!m! = k\cdot m\cdot(k-1)!(m-1)! \overset{*}{\leq} k\cdot m(k+m-2)! = \frac{k\cdot m}{(k+m-1)(k+m)}\cdot(k+m)! \overset{**}{\leq} (k+m)!$$

כאשר באי שיוויון $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה, ובאי שיוויון $**$ השתמשנו בכך ש־

$$\frac{k\cdot m}{(k+m-1)(k+m)} = \frac{k\cdot m}{k\cdot m + k^2 - k + m(k-1)} \leq 1$$

כי $k^2-k \geq 0$, ובנוסף $m(k-1) \geq 0$ ולכן המכנה גדול שווה המונה. (אני מניח כאן ש $k,m>0$. אמנם, צריך להתייחס גם למקרים בהם לפחות אחד מהם שווה לאפס, אבל אז מקבלים שיוויון באי השיוויון הנדרש להוכחה, ולכן הוא מתקיים).

ב. נסביר זאת ע"י בחירת סטודנטים למחלקה להנדסה: בצד שמאל אנו סופרים את מספר האפשרויות לקבל $k+m$ סטודנטים מתוך n מבקשים. צד ימין סופר את מספר האפשרויות לקבל k סטודנטים להנדסת מחשבים, ובנוסף עוד m מהנותרים לחשמל. כל בחירה כזו מתאימה לבחירה של $k+m$ סטודנטים למחלקה באופן כללי, אבל נשים לב שבצד

ימין יכולות להיות יותר אפשרויות, כי קבלת משה למחשבים ודוד לחשמל שונה כאן מבחירת דוד למחשבים ומשה לחשמל, בעוד כבחירתם למחלקה באופן כללי זו אותה בחירה. ניתן לפרמל זאת ע"י הגדרת פונקציה **על** מצד ימין לשמאל באופן שהפונקציה מקבלת זוג סדור (A,B) (A זה קבוצת המתקבלים למחשבים, B לחשמל) ומחזירה $A\cup B$ המבטא את קבוצת הסטודנטים שהתקבלו למחלקה.

5. יהיו $k,n\in\mathbb{N}$ כאשר $0\le k\le n$. הוכיחו את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$$

(א) בבדרך קומבינטורית (הדרכה: נחשוב על אגף ימין כסופר את כל תתי הקבוצות של $[2n+1]=\{1,2,...,2n+1\}$, כך שהאיבר $2n+1$ לא שייך אליהן. התאימו (באופן חח"ע ועל) בין הקבוצות הנספרות באגף שמאל לבין אלה שציינתי).

(ב) בדרך אלגברית (הדרכה: יש מספר זוגי של $0\le k\le 2n+1$, אך רק חלקם נסכמים בצד שמאל).

פתרון:

א. הוכחה בדרך קומבינטורית: אגף ימין הוא מספר תתי הקבוצות של $[2n+1]=\{1,\dots,2n+1\}$ שלא כוללות את האיבר $2n+1$. אגף שמאל סופר כמה תת־קבוצות של $\{1,\dots,2n+1\}$ הן לכל היותר בגודל n. התאמה חח"ע ועל תתאים לתת־קבוצה שלא מכילה את $2n+1$ את עצמה אם היא לכל היותר בגודל n, ואחרת (אם יש בה יותר מ־n איברים) תתאים את המשלימה שלה (שחייבת להיות לכל היותר בגודל n).

נפרמל: נסמן $X=\{A\subseteq[2n+1]:2n+1\notin A\},\ Y=\{B\subseteq[2n+1]:|B|\le n\}$, צ"ל: $|X|=|Y|$. נגדיר התאמה $f:X\to Y$ ע"י:

$$f(A)=\begin{cases}A & |A|\le n\\ A^c & |A|>n\end{cases}$$

נראה שההתאמה חח"ע ועל: חח"ע כי אם $A_1\neq A_2\in X$, נחלק למקרים:

א. $|A_1|\le n,|A_2|\le n$, נקבל ש־ $f(A_1)=A_1\neq A_2=f(A_2)$.

ב. $|A_1|>n,|A_2|>n$, נקבל ש־ $f(A_1)=A_1^c\neq A_2^c=f(A_2)$.

ג. בה"כ $|A_1|\le n,|A_2|>n$, נקבל ש־ $f(A_1)=A_1,f(A_2)=A_2^c$, ולכן $2n+1\notin f(A_1),2n+1\in f(A_2)$, ולכן $f(A_1)\neq f(A_2)$.

על: כי לכל קבוצה מגודל לכל היותר n המקור שלה הוא עצמה אם היא לא מכילה את $2n+1$, והמשלים אם כן.

ב. הוכחה בדרך אלגברית: תמיד מתקיים: $\binom{2n+1}{k}=\binom{2n+1}{2n+1-k}$ (נקרא, לצורך העניין, ל־k ו־$2n+1-k$ "חברים"). כיון ש־ $2n+1$ אי־זוגי נקבל שבסכום $\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}$, ומהשיוויון לעיל נוכל לרשום את הסכום באופן הבא:

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=2\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$$

הסבר: לכל $0 \le k \le n$ מתקיים $2n+1-k > n$, ולכן ה"חבר" המתאים שלו נמצא בחלק השני של הסכום (ולכל מחובר יש "חבר" כזה), לכן לקחנו רק חצי מהמחוברים והכפלנו כל אחד פי 2. כעת, מזהות הבינום אנו יודעים ש-$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$, ולכן $2\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$ מה שאומר:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

6. נסמן: $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$. נסמן ב־A את אוסף המספרים הזוגיים ב־$[n]$, וב־B את אוסף המספרים האי־זוגיים ב־$[n]$. הוכיחו:

$$\sum_{k\in A}k\binom{n}{k} = \sum_{k\in B}k\binom{n}{k} = n2^{n-2}$$

פתרון:

ניעזר בתרגיל שעשינו בכיתה, לפיו: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ (נסמן זהות זו ב־$*$), כלומר, מס' תתי הקבוצות של n איברים שהן מגודל זוגי שווה למס' תתי הקבוצות שהן מגודל אי־זוגי. מה שאנחנו צריכים להוכיח בתרגיל בשלב ראשון (השיוויון השמאלי בתרגיל) זה בעצם:

$$\sum_{k=0}^{n}k(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

ונעשה זאת באמצעות זהות הקפטן:

$$\sum_{k=0}^{n}k(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}k(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}n(-1)^k\binom{n-1}{k-1} = n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k} = 0$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מ־$*$. כעת לשיוויון הימני: מהשיוויון השמאלי ותרגיל 1ב נובע ש־ $2\cdot\sum_{k\in A}k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$, ולכן נקבל:

$$\sum_{k\in A}k\binom{n}{k} = n2^{n-2}$$

.7

(א) הוכיחו:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n$$

(ב) הוכיחו:

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}2^k = n3^{n-1}$$

פתרון:

א. מנוסחת הבינום $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$, והצבה $a=2, b=1$ נקבל הדרוש.

ב. נתבונן בפונקציה $f(x)=(2+x)^n$ המקיימת גם $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k x^{n-k}$. נגזור ונציב $x=1$ לפי שתי ההצגות של הפונקציה:

מצד אחד נקבל $f'(x)=n(2+x)^{n-1}$ ולכן $f'(1)=n\cdot 3^{n-1}$.

מצד שני נקבל $f'(x)=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}2^k x^{n-k-1}$ ולכן $f'(1)=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}2^k$.

8. הוכיחו:

$$\sum_{i=a}^{b}\binom{n+i}{i} = \binom{n+b+1}{n+1} - \binom{n+a}{n+1}$$

פתרון:

(עבור $a=0$ זה בדיוק מה שעשינו בכיתה).

נוסחת פסקל אומרת: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, ולכן $\binom{n-1}{k}=-\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}$. ולכן אצלנו נקבל: $\binom{n+i}{i}=-\binom{n+i}{i-1}+\binom{n+i+1}{i}$, נציב בסכום ונשתמש בכך שיש כאן טור טלסקופי:

$$\sum_{i=a}^{b}\binom{n+i}{i} = \sum_{i=a}^{b} -\binom{n+i}{i-1}+\binom{n+i+1}{i} =$$

$$= -\binom{n+a}{a-1}+\binom{n+a+1}{a}-\binom{n+a+1}{a}+\binom{n+a+2}{a+1}-+\cdots-\binom{n+b}{b-1}+\binom{n+b+1}{b} =$$

$$= -\binom{n+a}{a-1}+\binom{n+b+1}{b} = \binom{n+b+1}{n+1}-\binom{n+a}{n+1}$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מכך ש־ $\binom{n+b+1}{n+1}=\binom{n+b+1}{b}$, וש־ $\binom{n+a}{n+1}=\binom{n+a}{a-1}$.

9. חשבו את המקדמים הבאים (היעזרו, כמובן, במקדמים מולטינומיים):

(א) המקדם של ab^5c^3 בפיתוח של $(a+b+c+d)^9$.

(ב) המקדם של a^5b^4c בפיתוח של $(2a-3b+c)^{10}$.

(ג) המקדם של b^{10} בפיתוח של $(2a+3b+c)^{10}$.

(ד) המקדם של y^{24} בפיתוח של $(1+y^2+y^9)^{25}$.

(ה) המקדם של x^{21} בפיתוח של $(1+x^5+x^8)^{100}$.

פתרון:

א. זהו מקדם מולטינומי רגיל ולכן נקבל $\frac{9!}{5!\cdot 3!} = \frac{9!}{1!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 0!} = \binom{9}{1,5,3,0}$.

ב. כאן צריך להתייחס גם לקבועים שיחד עם המשתנים. מפיתוח מולטינום נקבל:

$$(2a-3b+c)^{10} = \sum_{n_1+n_2+n_3=10} \binom{10}{n_1,n_2,n_3}(2a)^{n_1}(-3a))^{n_2}c^{n_3} = \sum_{n_1+n_2+n_3=10} \binom{10}{n_1,n_2,n_3}2^{n_1}(-3)^{n_2}a^{n_1}b^{n_2}c^{n_4}$$

ולכן אצלנו, בהצבת $n_1=5, n_2=4, n_3=1$, נקבל שהמקדם הוא: $\binom{10}{5,4,1}2^5 3^4 = 32\cdot 81\cdot \frac{10!}{5!\cdot 4!}$.

ג. בדומה לקודם (רק בלי המינוס ליד ה־3), ובהצבת $n_1=0, n_2=10, n_3=0$, נקבל: $\binom{10}{0,10,0}2^0 3^{10} = 3^{10}$.

ד. כדי לקבל y^{24} חייבים לבחור פעמיים את y^9, ו־3 פעמים את y^2. יתר הפעמים (20) צריך לבחור את 1. לכן נקבל שזה יוצא $\binom{25}{20,3,2} = \frac{25!}{20!\cdot 3!\cdot 2!}$.

ה. בדומה לסעיף הקודם, כאן צריך לבחור פעמיים את x^8 ופעם אחת את x^5, ולכן נקבל: $\binom{100}{97,1,2} = \frac{100!}{97!\cdot 1!\cdot 2!} = 50\cdot 98\cdot 99$.