

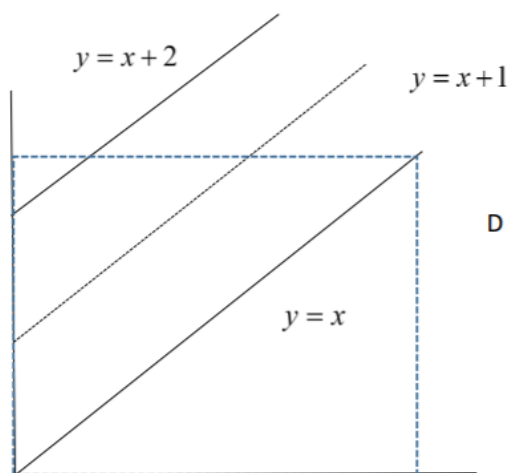
# תרגיל 10

1.

יהי  $X = Y = \mathbb{R}$  ונסתכל על  $\mathbb{R}^2$  ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ and } x \leq y < x+1 \\ -1 & x \geq 0 \text{ and } x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הראו כי  $\int \int f(x, y) m(dx) m(dy) \neq \int \int f(x, y) m(dy) m(dx)$  . מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?



נחשב

$$h(y) = \int f(x, y) m(dx) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \int_0^y 1 dm = y & 0 \leq y < 1 \\ \int_0^{y-1} -1 dm + \int_{y-1}^y 1 dm = 2 - y & 1 \leq y < 2 \\ \int_{y-2}^{y-1} -1 dm + \int_{y-1}^y 1 dm = 0 & 2 \leq y < \infty \end{cases}$$

ולכן

$$\iint f(x, y) m(dx) m(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) dm = \int_0^1 y m(dy) + \int_1^2 (2-y) m(dy) = 1$$

מצד שני,

$$g(x) = \int f(x, y) m(dy) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_x^{x+1} 1 m(dy) + \int_{x+1}^{x+2} -1 m(dy) = 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\iint f(x, y) m(dy) m(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dm = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dm = 0$$

ומכאן ש

$$1 = \iint f(x, y) m(dx) m(dy) \neq \iint f(x, y) m(dy) m(dx) = 0$$

על מנת להראות כי אין סתירה למשפט פוביני, נראה כי  $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dm \times dm = \infty$ . נחשב את

$\int_D |f(x, y)| dm \times dm$  כאשר  $D_x$  הינו הריבוע בציור שצולעו באורך  $x$ . ברור כי אינטגרל כפול על הפונקציה

הינו השטח של הריבוע  $D_x$  פחות שני המשולשים. כלומר, אם גודל הריבוע הוא  $x^2$  אזי

$$\int_{D_x} |f(x, y)| dm \times dm = x^2 - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2} \right) = 2x - 2$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dm \times dm = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{D_x} |f(x, y)| dm \times dm = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - 2 = \infty$$

מתקיימים ולכן אין סתירה.

2.

תהי  $A$  תת קבוצה של  $[0,1]^2$  מדידה לבג (ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה) עם מידה  $m_2(A) = 1$  כאשר  $m_2 = m \times m$  ו  $m$  הינה מידת לבג. הראו כי כמעט לכל  $x \in [0,1]$  הקבוצה  $s_x(A) = \{y : (x,y) \in A\}$  הינה בעלת מידה  $m(s_x(A)) = 1$ .

פתרון: ברור כי הפונקציה  $1_A$  הינה מדידה לבג ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה של  $[0,1]^2$ . כמו כן נובע כי

$$\int_{[0,1]^2} 1_A(x,y) dm_2(x,y) = m_2(A) = 1 < \infty$$

עפ"י משפט טונלי נקבל כי

$$\int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} 1_{s_x(A)}(x,y) m(dy) \right) m(dx) = \int_{[0,1]} m(s_x(A)) m(dx) = 1$$

נובע כי

$$\int_{[0,1]} (1 - m(s_x(A))) m(dx) = 0$$

מכיוון ש  $s_x(A) \subseteq [0,1]$  נובע כי  $m(s_x(A)) \leq 1$  ולכן  $1 - m(s_x(A)) \geq 0$  לכל  $x \in [0,1]$ . ראינו כבר כי אם  $f \geq 0$  כב"מ וגם  $\int f d\mu = 0$  אזי נובע כי  $f = 0$  כב"מ. מכאן ש  $1 - m(s_x(A)) = 0$  כב"מ ולכן  $1 = m(s_x(A))$  כב"מ.