תזכורת.

הגדרה יהי M מרחב מטרי. העתקה $f: M \to M$ נקראת *העתקה מכווצת* אם קיים מספר ממשי $0 \le a < 1$ כך שלכל $x, y \in M$ מתקיים $d\big(f(x), f(y)\big) \le a \cdot d(x, y)$.
(אנחנו נקרא a "מקדם כיווץ").

הגדרה. יהי M מרחב מטרי ו-$A \subseteq M$ תת-קבוצה במרחב. אם A חסומה המספר $diam(A) := \sup\limits_{x,y \in A} d(x, y)$ נקרא *קוטר של תת-קבוצה* A. (הוא קיים כחסם עליון של קבוצה חסומה מלעיל ב-$\mathbb{R}$).
אם A איננה חסומה אז בהגדרה: $diam(A) := \infty$.

1. עקרון העתקות המכווצות.

משפט. יהי M מרחב מטרי קומפקטי ותהא $f: M \to M$ העתקה מכווצת. אזי קיימת *נקודת שבת* של f , כלומר, קיימת $x^* \in M$ כך ש- $f(x^*) = x^*$.

הוכיחו את המשפט על נקודת שבת בשלבים:

נסמן $F_0 = M$ ו- $F_n = f(F_{n-1})$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

א' הוכיחו ש- $F_n \subseteq F_{n-1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

ב' הוכיחו ש- F_n סגורה לכל $n \in \mathbb{N}$.

ג' הוכיחו ש- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

ד' הוכיחו ש- $diam(F_n) \le a \cdot diam(F_{n-1})$ לכל $n \in \mathbb{N}$. (כאשר a "מקדם כיווץ")

ה' הוכיחו ש- $\lim\limits_{n \to \infty} diam(F_n) = 0$

ו' הוכיחו שקיימת נקודה $x^* \in M$ כך ש- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x^*\}$

ז' הוכיחו ש- $f(x^*) = x^*$.

2. (קומפקטיפיקציה.) יהי $X = \mathbb{R}^n \cup \{p\}$ כהשר $p \notin \mathbb{R}^n$.
נגדיר אוסף τ של תת-קבוצות ב-X:

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid U \ is \ open \ in \ \mathbb{R}^n\} \cup$$
$$\{ V \subseteq X \mid p \in V \wedge X - V \ is \ compact \ in \ \mathbb{R}^n\}$$

<u>א'</u> הוכיחו ש- τ טופולוגיה.
<u>ב'</u> הוכיחו ש- (X, τ) מרחב טופולוגי קומפרטי.

3. להראת שטופולוגיה חזקה מטופולוגית האוסדורף היא גם טופולוגית האוסדורף.

4. להראת שבמרחב האוסדורף טופולוגיה המושרת לכל תת-מרחב סופי היא טופולוגיה דיסקרטית.

5. להראת שבמרחב האוסדורף לסדרה לא יכול להיות יותר מגבול אחד.

6. הוכיחו שמ"ט X הוא מרחב האוסדורף א"א לכל $x \in X$ מתקיים:

$$\bigcap_{\substack{F \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F = \{x\}$$

7. יהיה X מ"ט .הוכיחו שאמ לכל $x \neq y \in X$ קיים מרחב האוסדורף Y ופונקציה רציפה f כך ש- $f(x) \neq f(y)$, אזי X מרחב האוסדורף.
8. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, Y - מרחה האוסדורף ו- $f, g: X \to Y$ שתי פונקציות רציפות. הוכיחו שתת-קבוצה $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ סגורה.