

# תרגיל בית 3 בגרפים מרחיבים

## 88-558 סמסטר א' תשע"ו

להגשה ביום ה', 7.1.2016.

### שאלה 1.

א. הוכיחו כי מספר המסלולים הסגורים באורך  $2k$  בעץ ה- $d$ -רגולרי האינסופי  $T_d$  הוא  $(d-1)^k C_{2k}$  כאשר  $C_{2k}$  הוא מספר קטלאן ה- $2k$ .

ב. הוכיחו כי מספר המסלולים הסגורים באורך  $2k$  בכל גרף  $d$ -רגולרי הוא לפחות  $(d-1)^k C_{2k}$ .

**שאלה 2.** הוכיחו כי אם  $|\lambda| > 2\sqrt{d-1}$  אזי  $\lambda$  אינו נמצא בספקטרום של  $T_d$ .

**שאלה 3.** יהיו  $N = 2^n, D = 2^d$ . הוכיחו כי גרף  $(N, D, \lambda)$ -מרחיב נותן  $(n-d, 2\log \frac{D}{\lambda} - \log \frac{1}{\varepsilon} - 1, \varepsilon)$ -מוליך (conductor).

**שאלה 4.** הראו כי  $(k, \varepsilon)$ -מוליך שאינו מאבד (lossless conductor)

$$C : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^d \rightarrow \{0, 1\}^m$$

נותן גרף דו-צדדי בעל  $N = 2^n$  קודקודים בצד שמאל,  $M = 2^m$  קודקודים בצד ימין, דרגת כל קודקוד בצד שמאל היא  $D = 2^d$ , והגרף הדו-צדדי מקיים שעבור כל קבוצת קודקודי צד שמאל בגודל לכל היותר  $2^k$  מתקיים שקבוצת שכניה מתרחבת בפקטור של לפחות  $(1-\varepsilon)D$ . כלומר הראו כי מוליך שאינו מאבד גורר מרחיב שאינו מאבד (lossless expander).

**שאלה 5.** הראו כי עבור  $m > k + d + \log \frac{1}{\varepsilon}$  קיים  $(k, \varepsilon)$ -מוליך שאינו מאבד

$$C : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^d \rightarrow \{0, 1\}^m$$

(רמז: הראו כי למעשה פונקציה מקרית היא מוליך כנדרש בהסתברות גבוהה).

**שאלה 6.** מצא את הערכים העצמיים של גרף מלא עם  $n$  קודקודים. העזר ברעיונות לחישוב ערכים עצמיים עבור גרפי קיילי של חבורה אבלית.

**שאלה 7** (\*, רשות). הראה גרף קיילי מפורש של חבורה אבלית שהינו  $(n, d = \Theta[(\log n)^4], \lambda = \Theta[(\log n)^3])$ -מרחיב או טוב מכך, כלומר

$$d \leq \Theta[(\log n)^4], \quad \frac{\lambda}{d} < \frac{C}{\log n}$$

עבור  $C > 0$  קבוע.