בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תש"ע סמסטר קיץ מועד ב

מרצים: ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על 5 שאלות **בדיוק**, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**.
המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	

ציון:

בהצלחה

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 1

תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$. נגדיר $A\bullet B=\{a\cdot b\mid a\in A,b\in B\}$.

א. (1) רשום במפורש את $\{1,2\}\bullet\{3,4,5\}$.

ב. (2) הוכח או הפרך: אם $A\bullet B=B$ אז $A=\{1\}$ או $B=\{0\}$.

ג. (2) תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ כך ש- $0,1\notin A$. הוכח או הפרך: $A\cap(A\bullet A)=\varnothing$.

תת קבוצה $\Delta\subseteq P(\mathbb{R})$ תקרא חסרת כפל אם לכל $A,B\in\Delta$ מתקיים $A\bullet B\notin\Delta$.

ד. (2) תהי $\Delta\subseteq P(\mathbb{R})$ קבוצה חסרת כפל. הוכח ש- $\{1\}\notin\Delta$.

ה. (2) תן דוגמא לקבוצה $\Delta\subseteq P(\mathbb{R})$ כך ש- $\Delta=\{A\}$, A אינסופית ו- Δ קבוצה חסרת כפל.

ו. (13) הוכח שקיימת קבוצה חסרת כפל $\Delta\subseteq P(\mathbb{R})$ שהיא מקסימלית ביחס להכלה. כלומר לכל $\Gamma\subseteq P(\mathbb{R})$ כך ש $\Delta\subset\Gamma$ (מכילה ממש), Γ אינה חסרת כפל.

פתרון

א. $\{3,4,5,6,8,10\}$

ב. לא נכון: דוגמא נגדית $A=\{2\}$, $B=\{2^n:n\in\mathbb{Z}\}$ ואז $A\bullet B=B$.

ג. לא נכון: דוגמא נגדית $A=\{2,4\}$ ואז $A\cap(A\bullet A)=\{4\}$.

ד. נניח בשלילה ש $\{1\}\in\Delta$ ואז נקבל ש $\{1\}\bullet\{1\}=\{1\}\in\Delta$ בסתירה לכך ש Δ חסרת כפל.

ה. תהי A קבוצת המספרים הראשוניים. A אינסופית ו $A\bullet A\notin\Delta$.

ו. נסמן: $B:=\left\{\Gamma\subseteq P\left(\mathbb{R}\right):\Gamma \text{ חסרת כפל }\right\}$. מסעיף ה B שונה מקבוצה ריקה.

נגדיר על B את יחס ההכלה ונתבונן בשרשרת כלשהי $\left\{\Gamma_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ (ז"א $\dots\subseteq\Gamma_\alpha\subseteq\Gamma_\beta\subseteq\dots$) ב B.

נתבונן בקבוצה $\bigcup_{\alpha\in I}\Gamma_\alpha$ ונוכיח שהיא ב B ז"א שהיא חסרת כפל.

יהיו $A,B\in\bigcup_{\alpha\in I}\Gamma_\alpha$ על פי הגדרת האיחוד קיימים $\alpha,\beta\in I$ כך ש $A\in\Gamma_\alpha,B\in\Gamma_\beta$. נניח בשלילה ש $A\bullet B\in\bigcup_{\alpha\in I}\Gamma_\alpha$ על פי הגדרת האיחוד קיים $\delta\in I$ כך ש $A\bullet B\in\Gamma_\delta$ על פי הגדרת שרשרת ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות ש $\Gamma_\alpha\subseteq\Gamma_\beta\subseteq\Gamma_\delta$ ולכן $A,B,A\bullet B\in\Gamma_\delta$ בסתירה לכך ש Γ_δ חסרת כפל. כמובן $\Gamma_\beta\le\bigcup_{\alpha\in I}\Gamma_\alpha$ לכל $\beta\in I$. הראינו שלכל שרשרת ב B יש חסם מלעיל ב B ולכן על פי הלמה של צורן יש ב B איבר מקסימלי. על פי הגדרת B קיימת קבוצה חסרת כפל $\Delta\subseteq P(\mathbb{R})$ שהיא מקסימלית ביחס להכלה.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 2

א. תנו דוגמא לקבוצה A , או הוכיחו שלא קיימת, כך ש- $|A\cap P(A)|=|A|$, במקרים הבאים:

1. (3) עבור $|A|=1$.
2. (3) עבור $|A|=2$.

ב. (3) הוכח או הפרך: אם $A\cap P(A)\neq\varnothing$ אז $\varnothing\in A$.

ג. (6) תהי $f:X\to Y$ ותהיינה $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$, הוכיחו:

$$f[A\cap f^{-1}[B]]=f[A]\cap B$$

$$f[f^{-1}[B]]=f[X]\cap B$$

ד. (5) יהיו $(a_{1,1},a_{1,2},...,a_{1,n}),(a_{2,1},a_{2,2},...,a_{2,n}),...,(a_{2^n+1,1},a_{2^n+1,2},...,a_{2^n+1,n})\in\mathbb{R}^n$ 2^n+1 נקודות במרחב $\mathbb{R}^n$ בעלי קורדינטות שלמות. נסמן ב- $(c_{ij,1},c_{ij,2},...,c_{ij,n})$ את אמצע הקטע שקצותיו הם $(a_{i,1},a_{i,2},...,a_{i,n})$ ו- $(a_{j,1},a_{j,2},...,a_{j,n})$ לכל $1\leq i\neq j\leq 2^n+1$. הראו כי לפחות לאחת מנקודות האמצע הנ"ל קורדינטות שלמות.

זכרו: אמצע הקטע שקצותיו הם $(a_{i,1},a_{i,2},...,a_{i,n})$ ו- $(a_{j,1},a_{j,2},...,a_{j,n})$ הוא $(\frac{a_{i,1}+a_{j,1}}{2},\frac{a_{i,2}+a_{j,2}}{2},...,\frac{a_{i,n}+a_{j,n}}{2})$.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

א. 1. $A=\{\varnothing\}$ ואז $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ במקרה הנ"ל $|A\cap P(A)|=|A|$.

2. $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ ואז $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ גם במקרה הזה נקבל $|A\cap P(A)|=|A|$.

ב. לא נכון – דוגמא נגדית $A=\{1,\{1\}\}$ ואז $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{\{1\}\},\{1,\{1\}\}\}$ ואז $A\cap P(A)=\{1\}$.

ג. יהי $x\in f[A]\cap B$ על פי הגדרת החיתוך $x\in f[A]\wedge x\in B$ ז"א $x\in B$ וגם קיים $y\in A$ כך ש $x=f(y)$. מכיוון ש $x\in B$ ו $x=f(y)$ אז $y\in f^{-1}[B]$. סה"כ קיבלנו ש $y\in A\cap f^{-1}[B]$ ומכיוון ש $x=f(y)$ נקבל ש $x\in f[A\cap f^{-1}[B]]$.

יהי $x\in f[A\cap f^{-1}[B]]$ ז"א קיים $y\in A\cap f^{-1}[B]$ כך ש $x=f(y)$. מכיוון ש $y\in A$ נקבל ש $x\in f[A]$ ומכיוון ש $y\in f^{-1}[B]$ נקבל ש $x\in B$ סה"כ קיבלנו ש $x\in f[A]\cap B$.

הראינו הכלה דו כיוונית ולכן שוויון.

מכיוון ש $f^{-1}\left[B\right]\subseteq X$ אז $f^{-1}\left[B\right]\cap X=f^{-1}\left[B\right]$ בעזרת סעיף קודם נקבל שלכל

$f[A\cap f^{-1}[B]]=f[A]\cap B$ $A\subseteq X$ ובפרט עבור $A=X$

$f[X\cap f^{-1}[B]]=f[X]\cap B$ כעת מכיוון ש $f^{-1}\left[B\right]\cap X=f^{-1}\left[B\right]$ נקבל את הדרוש.

ד. תהיי $B=\left\{(a_{1,1},a_{1,2},...,a_{1,n}),(a_{2,1},a_{2,2},...,a_{2,n}),...,(a_{2^n+1,1},a_{2^n+1,2},...,a_{2^n+1,n})\right\}$

עבור כל סדרה $\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ של אפסים ואחדות נתאים תת קבוצה של B באופן הבא:

$S_{(b_1,b_2,...b_n)}=\left\{\left(a_1,a_2,...,a_n\right)\in B:\forall 1\le i\le n,\quad b_i=0\to a_i\right.$ זוגי $\quad b_i=1\to a_i$ אי זוגי $\left.\right\}$

מכיוון שיש 2^n אפשרויות לסדרה $\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ נקבל 2^n תתי קבוצות זרות של B.

עבור כל זוג איברים בקבוצה $S_{(b_1,b_2,...,b_n)}$ נקבל שאמצע הקטע הוא בקואורדינטות שלמות מכיוון שחיבור שני זוגיים נותן מספר זוגי וחיבור שני אי זוגיים נותן מספר אי זוגי.

מכיוון שבקבוצה B יש 2^n+1 איברים נקבל על פי עקרון שובך היונים תת קבוצה של B עם לפחות שני איברים באותה קבוצה נקבל ואז אמצע הקטע הוא בקורדינאטות שלמות.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 3

א. תהיינה $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ו- $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שתי משפחות של קבוצות.

הוכח:

1. (3) $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$
2. (3) $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \setminus \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$

הוכח או הפרך:

3. (4) $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$
4. (4) $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \supseteq \bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha \setminus B_\alpha)$

ב. הוכח: לכל משפחה $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות

1. (3) $\bigcap_{\alpha\in I} P(A_\alpha) = P(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)$
2. (3) $\bigcup_{\alpha\in I} P(A_\alpha) \subseteq P(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)$.

פתרון

א 1. יהי $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\beta\in I} B_\beta$ על פי הגדרת ההפרש $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \wedge x \notin \bigcup_{\beta\in I} B_\beta$ על פי הגדרת האיחוד קיים $\alpha \in I$ כך ש $x \in A_\alpha$ וגם לכל $\beta \in I$ $x \notin B_\beta$ ובפרט עבור $\alpha = \beta$ ועל פי הגדרת ההפרש $x \in A_\alpha \setminus B_\alpha$ ועל פי הגדרת האיחוד $x \in \bigcup_{\alpha\in I}\left(A_\alpha \setminus B_\alpha\right)$.

2. יהי $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \setminus \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ על פי הגדרת ההפרש $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \wedge x \notin \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ על פי הגדרת החיתוך קיים $\alpha \in I$ כך ש $x \notin B_\alpha$ וגם לכל $\beta \in I$ $x \in A_\beta$ ובפרט עבור $\alpha = \beta$ ועל פי הגדרת ההפרש $x \in A_\alpha \setminus B_\alpha$ ועל פי הגדרת האיחוד $x \in \bigcup_{\alpha\in I}\left(A_\alpha \setminus B_\alpha\right)$.

3. לא נכון - דוגמא נגדית $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, B_1 = \{3\}, B_2 = \{1,2\}$ אגף שמאל שווה לקבוצה ריקה ואגף ימין שווה ל $\{1\}$.

4. נכון – הוכחה – יהי $x \in \bigcap_{\alpha\in I}\left(A_\alpha \setminus B_\alpha\right)$ על פי הגדרת החיתוך לכל $\alpha \in I$ $x \in A_\alpha \setminus B_\alpha$ ז"א לכל $\alpha \in I$ $x \in A_\alpha \wedge x \notin B_\alpha$ על פי הגדרת החיתוך האיחוד וההפרש $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$.

ב. 1. $x \in \bigcap_{\alpha \in I} P(A_\alpha)$ על פי הגדרת החיתוך לכל $\alpha \in I$ $x \in P(A_\alpha)$ ז"א $x \subseteq A_\alpha$. יהי $y \in x$ מכיוון שלכל $\alpha \in I$ $x \subseteq A_\alpha$ נקבל שלכל $\alpha \in I$ $y \in A_\alpha$ ועל פי הגדרת החיתוך $y \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ ז"א $x \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ ועל פי הגדרת קבוצת החזקה $x \in P\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$.

יהיה $x \in P\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ על פי הגדרת קבוצת החזקה $x \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ על פי הגדרת ההכלה והחיתוך לכל $\alpha \in I$ $x \subseteq A_\alpha$ על פי הגדרת קבוצת החזקה לכל $\alpha \in I$ $x \in P(A_\alpha)$ ועל פי הגדרת החיתוך $x \in \bigcap_{\alpha \in I} P(A_\alpha)$.

2. יהי $x \in \bigcup_{\alpha \in I} P(A_\alpha)$ על פי הגדרת האיחוד קיים $\alpha \in I$ כך ש $x \in P(A_\alpha)$ ז"א $x \subseteq A_\alpha$ על פי הגדרת האיחוד $A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ולכן $x \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ על פי הגדרת קבוצת החזקה $x \in P\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 4

א. תהי A קבוצה אינסופית ונסמן $|A|=a$.

1. (11) נגדיר עבור $2\le n\in\mathbb{N}$ את הקבוצה הבאה

$Y=\{(X_1,X_2,...,X_n)\mid \bigcup_{i=1}^{n}X_i=A,\ \ X_i\cap X_j=\varnothing$ מתקיים $1\le i\ne j\le n$ לכל$\}$.

הוכח $|Y|=2^a$. רמז: התאם לכל n-יה כנ"ל פונקציה $f:A\to\{1,2,...,n\}$.

2. (5) מצא את $|\mathbb{N}\cup Y|$, את $|\mathbb{N}\times Y|$, את $|\mathbb{N}|^{|Y|}$ ואת $|Y|^{|\mathbb{N}|}$.

ב. (4) תהי $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות הזרות זו לזו וכך ש- $|A_i|=a_i$ לכל $i\in I$.

נגדיר $|\bigcup_{i\in I}A_i|=\sum_{i\in I}a_i$. חשב את $\sum_{n\in\mathbb{N}}\aleph$.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

א. 1

נגדיר פונקציה $f:Y\to\{1,2,...,n\}^A$ עבור $(x_1,x_2,...,x_n)\in Y$ ע"י

$f(x_1,x_2,...,x_n)=g$ ($g\in\{1,2,...,n\}^A$). כעת מכיוון ש $\bigcup_{i=1}^{n}x_i=A$ אז לכל $a\in A$ קיים

$1\le i\le n$ כך ש $a\in x_i$ ואז נגדיר $g(a)=i$, מכיוון שכל הקבוצות זרות g פונקציה.

נוכיח ש f פונקציה: נניח ש $(x_1,x_2,...,x_n)=(y_1,y_2,...,y_n)$.

$f((x_1,...,x_n))=g_1$ ו $f((y_1,y_2,...,y_n))=g_2$ נוכיח ש $g_1=g_2$ יהי $a\in A$ מכיוון ש

$(x_1,x_2,...,x_n)=(y_1,y_2,...,y_n)$ אז $a\in x_i\leftrightarrow a\in y_i$ כי אחרת קיים $j\ne i$ כך ש

$a\in x_i\wedge a\in y_j$ מכיוון ש $(x_1,x_2,...,x_n)=(y_1,y_2,...,y_n)$ נקבל ש $a\in x_i\wedge a\in x_j$

ועל פי הגדרת החיתוך $a\in x_i\cap x_j$ בסתירה לכך ש $(x_1,x_2,...,x_n)\in Y$.

נוכיח ש f חח"ע – נניח ש $g_1=f(x_1,x_2,...,x_n)\ne f(y_1,y_2,...,y_n)=g_2$ ז"א קיים

$a\in A$ כך ש $i=g_1(a)\ne g_2(a)=j$ ז"א $a\in x_i\wedge a\in y_j$ מכיוון ש

$(x_1,x_2,...,x_n)\in Y$ אז $a\notin x_j$ ולכן $x_j\ne y_j$ ז"א $(x_1,x_2,...,x_n)\ne(y_1,y_2,...,y_n)$.

נוכיח ש f על – יהי $g\in\{1,2,...,n\}^A$ נתבונן ב n-יה הבאה $(g^{-1}[1],g^{-1}[2],...,g^{-1}[n])$.

מכיוון ש g פונקציה אם $i\ne j$ אז $g^{-1}[i]\cap g^{-1}[j]=\varnothing$ בנוסף $\bigcup_{i=1}^{n}g^{-1}[i]=A$

ולכן $(g^{-1}[1],g^{-1}[2],...,g^{-1}[n])\in Y$ כעת על פי הגדרת f נקבל ש

$f((g^{-1}[1],g^{-1}[2],...,g^{-1}[n]))=g$.

הראינו ש f חח"ע ועל ולכן העוצמות שוות והוכחנו את הטענה. (מכיוון ש A אינסופית אז $|2^a|=|n^a|$)

א. 2

על פי סעיף א $|\mathbb{N}|<|Y|$ ועל פי משפט מההרצאה נקבל ש $|\mathbb{N}\cup Y|=\max\{|\mathbb{N}|,|Y|\}=|Y|=2^a$

ובאותו אופן $|\mathbb{N}\times Y|=\max\{|\mathbb{N}|,|Y|\}=|Y|=2^a$

$2^{\left(2^a\right)}=2^{|Y|}\le|\mathbb{N}|^{|Y|}\le\left|2^{\mathbb{N}}\right|^{|Y|}=2^{|\mathbb{N}\cdot Y|}=2^{|Y|}=2^{\left(2^a\right)}$ ולכן על פי קנטור ברנשטיין נקבל $2^{\left(2^a\right)}$.

נתון ש A קבוצה אינסופית ולכן $|\mathbb{N}|\le|A|$ ולכן $|\mathbb{N}|\cdot a=a$ כעת $|Y|^{|\mathbb{N}|}=\left|2^a\right|^{|\mathbb{N}|}=2^{|\mathbb{N}|\cdot a}=2^a$.

ב.

בעצם יש לחשב את $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right|$ כאשר $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ משפחה של קבוצות זרות ולכל $n\in\mathbb{N}$ $|A_n|=\aleph$. מכיוון שלכל $n\in\mathbb{N}$ $|A_n|=\aleph$, לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת פונקציה חח"ע ועל $g_n:\mathbb{R}\to A_n$

נבנה פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ כך ש $f(n,a)=g_n(a)$ נשים לב ש f חח"ע ועל

סה"כ קיבלנו $\sum_{n\in\mathbb{N}}\aleph=|\mathbb{N}\times\mathbb{R}|=\aleph$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 5

א. (7) מצא נוסחה מפורשת עבור $a_n=\sum_{k=1}^{n}k^2$ (רמז: רשום נוסחה רקורסיבית עבור a_n).

ב. (8) בכמה דרכים שונות אפשר לסדר 4 ישראלים, 3 צרפתים ו – 5 סינים בשורה כך שאף לאום לא יעמוד כבלוק רציף ? (כל האנשים שונים).

ג. (5) יהי $2\le n\in\mathbb{N}$. מצאו את מספר תת הקבוצות בגודל k ($0\le k\le n$) של הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ שאינן מכילות את הקבוצה $\{1,2\}$.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

א.

נרשום נוסחה רקורסיבית $\begin{cases}a_n=a_{n-1}+n^2\\ a_1=1\end{cases}$ כעת נמצא פתרון פרטי

$$a_n=an^3+bn^2+cn\rightarrow a_{n-1}=an^3+\left(b-3a\right)n^2+\left(3a-2b+c\right)n-a+b-c$$

ולכן $an^3+bn^2+cn=an^3+\left(b-3a+1\right)n^2+\left(3a-2b+c\right)n-a+b-c$

ז"א $bn^2+cn=\left(b-3a+1\right)n^2+\left(3a-2b+c\right)n-a+b-c$

כעת יש לפתור את המערכת הבאה: $\begin{cases}b=b-3a+1\\ c=3a-2b+c\\ 0=-a+b-c\end{cases}$

נקבל: $a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{6}$

ז"א $a_n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$

כעת נמצא פתרון כללי ללא הומוגני $a_n=a_{n-1}$ ונקבל $a_n=d$

הפתרון הכללי ללא הומוגני הוא $a_n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+d$

נציב את תנאי ההתחלה $a_1=1$ ונקבל ש $d=0$ ולכן התשובה הסופית

$$a_n=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n\left(2n+1\right)\left(n+1\right)}{6}$$

ב.   נסמן: S - כל האפשרויות, A - הישראלים עומדים כבלוק רציף, B - הצרפתים עומדים כבלוק רציף, C - הסינים עומדים כבלוק רציף. יש לחשב את $\left|S\setminus\left(A\cup B\cup C\right)\right|$. נחשב בעזרת עקרון ההכלה וההדחה את $\left|\left(A\cup B\cup C\right)\right|$.

$$\begin{aligned}&|A|=4!\cdot 9!,|B|=3!\cdot 10!,|C|=5!\cdot 8!,\\&|A\cap B|=4!\cdot 3!\cdot 7!,|A\cap C|=4!\cdot 5!\cdot 5!,|B\cap C|=3!\cdot 5!\cdot 6!,\\&|A\cap B\cap C|=4!\cdot 3!\cdot 5!\cdot 3!,|S|=12!\end{aligned}$$

סה"כ נקבל

$$\left|S\setminus\left(A\cup B\cup C\right)\right|=12!-\left(4!\cdot 9!+3!\cdot 10!+5!\cdot 8!\right)+\left(4!\cdot 3!\cdot 7!+4!\cdot 5!\cdot 5!+3!\cdot 5!\cdot 6!\right)-4!\cdot 3!\cdot 5!\cdot 3!$$

ג. נחשב את האפשרויות הבאות:

אפשרות 1: מספר תתי הקבוצות בגודל k ללא הספרות 1,2.

אפשרות 2: מספר תתי הקבוצות בגודל k ללא הספרה 1 אבל עם הספרה 2.

אפשרות 3: מספר תתי הקבוצות בגודל k ללא הספרה 2 אבל עם הספרה 1.

אפשרות 1 יש לבחור קבוצה בגודל k מתוך קבוצה מגודל $n-2$ ולכן מספר האפשרויות $\binom{n-2}{k}$.

אפשרות 2יש לבחור קבוצה בגודל $k-1$ מתוך קבוצה מגודל $n-2$ ולכן מספר האפשרויות $\binom{n-2}{k-1}$.

אפשרות 3יש לבחור קבוצה בגודל $k-1$ מתוך קבוצה מגודל $n-2$ ולכן מספר האפשרויות $\binom{n-2}{k-1}$.

סה"כ האפשרויות $\binom{n-2}{k}+2\binom{n-2}{k-1}$.

הערה: אם $k=0$ אז ניתן לבחור רק את הקבוצה הריקה ואז התשובה היא 1.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 6

א. (8) בכמה אופנים ניתן למקם n כדורים ב-m תאים שונים כך שהתא הראשון לא יישאר ריק. התבונן ב-2 מקרים:
1. כל הכדורים שונים
2. כל הכדורים זהים.

ב. (8) יהיו E יחס על קבוצה A ו- F יחס על קבוצה B. יחס G על $A\times B$ מוגדר ע"י $((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in G$ אם ורק אם $(a_1,a_2)\in E$ ו- $(b_1,b_2)\in F$.

הוכח או הפרך:
1. אם E ו- F סימטרים אז G הוא סימטרי.
2. אם E ו- F טרנזיטיביים אז G הוא טרנזיטיבי.

ג. (4) תהי A קבוצה סופית, E יחס שקילות על A, ויהיו $A_1,\dots,A_k$ כל מחלקות השקילות השונות של A. הוכח $|E|=|A_1|^2+\dots+|A_k|^2$.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

א1

נחשב תחילה את כל האפשרויות: לכל כדור יש m אפשרויות ולכן יש סה"כ m^n אפשרויות.
נחשב את כל האפשרויות כאשר תא מספר 1 ריק: כעת לכל כדור יש m-1 אפשרויות ולכן יש סה"כ $(m-1)^n$.

כעת מספר האפשרויות הדרוש הוא: $m^n-(m-1)^n$.

א2

מכיוון שכל הכדורים זהים השוני בין כל אפשרות הוא מספר הכדורים בכל תא ולכן יש לפתור את הבעיה הבאה: כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+\dots+x_m=n$ כאשר x_1 מספר שלם חיובי ו x_i מספר שלם אי שלילי לכל $2\le i\le m$. ז"א מספר האפשרויות לפתור את המשוואה $x_1+x_2+\dots+x_m=n-1$ כאשר כל המספרים שלמים ואי שלילים על פי משפא מההרצאה נקבל

$$\binom{n+m-2}{n-1}$$

ב1. נכון

נניח ש $((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in G$ על פי הגדרת G נקבל ש $(a_1,a_2)\in E\wedge(b_1,b_2)\in F$ נתון ש E ו F סימטריים ולכן $(a_2,a_1)\in E\wedge(b_2,b_1)\in F$ ועל פי הגדרת G $((a_2,b_2),(a_1,b_1))\in G$.

ב2. נכון

נניח ש $((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in G\wedge((a_2,b_2),(a_3,b_3))\in G$ על פי הגדרת G נקבל ש $((a_1,a_2)\in E\wedge(b_1,b_2)\in F)\wedge((a_2,a_3)\in E\wedge(b_2,b_3)\in F)$ מכיוון ש E ו F טרנזיטיביים נקבל ש $(a_1,a_3)\in E\wedge(b_1,b_3)\in F$ על פי הגדרת G נקבל ש $((a_1,b_1),(a_3,b_3))\in G$.

ג.

על פי הגדרת מחלקת שקילות לכל $1\le i\le n$ הקבוצות A_i זרות ולכל $a,b\in A_i$ נקבל ש $(a,b)\in E$ ולכן לכל $1\le i\le n$ נקבל $|A_i|^2$ איברים שונים ב E בנוסף אם $(a,b)\in E$ אז קיים $1\le i\le n$ כך ש $a,b\in A_i$ ולכן נקבל בדיוק $|A_1|^2+\dots+|A_k|^2$ איברים ב E