

תרגיל 6 אליזה למורים

21 בדצמבר 2016

שאלה 1

האם הטור הבא מתכנס: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n-1}}$?

הדרכה:

נתבונן בסדרת הסכומים הלקיים של הטור:

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{3^j}{2^{j-1}} = \sum 2 \cdot \frac{3^j}{2^j} = \sum 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^j = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) = 2 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}}\right)$$

למה שווה גבול של הסדרה הזו? ומכיוון שסכום של טור אינסופי הוא גבול של סדרת

הסכומים החלקיים שלו אזי מה אפשר להגיד על הטור שלנו?

שאלה 2

בדוק האם הטורים הבאים מתכנסים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^3 + 5n + 2} \quad (1)$$

$$\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+2-1})} \quad (2)$$

שאלה 3

מצא את גבולות הבאים:

$$\lim \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2} \quad (1)$$

משפט שימושי: נניח כי $\lim a_n = 1$, אזי $\lim (a_n)^{b_n} = e^{\lim(a_n-1)b_n}$.

$$\lim \left(\frac{n+4}{n+7}\right)^{n+1} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^2+4} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \quad (4)$$

רמז: משפט סנדוויץ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^3+n^2}}{\sqrt[3]{n^6+2} + \sqrt[3]{n^3+4}} \quad (5)$$

תזכורת: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^3)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3-1} - \sqrt[3]{n^3+1}} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^2 + 2^n + 3^n + \dots + 666^n} \quad (7)$$

רמז: שאלה דומה מאוד ראינו בכיתה.

שאלה 4

ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

(א) הוכח או הפרד: $\lim(b_n) = 0$ אזי $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0$.

(ב) תהי a_n סדרה ממשית מתכנסת לגבול ממשי L ותהי b_n סדרה חסומה אזי $a_n \cdot b_n$

מתכנסת אם ורק אם $L = 0$.