יישומים נחמדים של דברים שראינו בסוף הקורס: נוסחת האינטרפולציה של לגרנז' ופיתוח טיילור

בועז צבאן

31 בינואר 2012

1 נוסחת האינטרפולציה של לגרנז'

יהיו $\mathbb{F}$ שדה ו $V = \mathbb{F}_n[x]$. נקבע $\gamma \in \mathbb{F}$. נגדיר $\varphi : V \to \mathbb{F}$ על ידי

$$\varphi(f(x)) := f(\gamma)$$

לכל $f(x) \in V$ (הצבת הסקלר γ בפולינום).

למה 1.1 בסימונים הנ"ל, $\varphi : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי, כלומר $\varphi \in V^*$.

הוכחה: יהיו $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in \mathbb{F}_n[x]$, ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
$\alpha f(x)+\beta g(x) = \alpha(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+\beta(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n) = (\alpha a_0+\beta b_0)+(\alpha a_1+\beta b_1)x+\cdots+(\alpha a_n+\beta b_n)x^n$.
לכן,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)\gamma + \cdots + (\alpha a_n + \beta b_n)\gamma^n = \\ &= \alpha(a_0 + a_1\gamma + \cdots + a_n\gamma^n) + \beta(b_0 + b_1\gamma + \cdots + b_n\gamma^n) = \alpha\varphi(f(x)) + \beta\varphi(g(x))\end{aligned}.$$

■

יהי $\mathbb{F}$ שדה עם לפחות $n+1$ איברים. נקבע $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in \mathbb{F}$ שונים. לכל $i = 0, \dots, n$, יהי $\varphi_i : \mathbb{F}_n[x] \to \mathbb{F}$ הפוקנציונל של הצבת γ_i:

$$\varphi_i(f(x)) := f(\gamma_i)$$

לכל $f(x) \in \mathbb{F}_n[x]$. בלמה הקודמת הראינו שכל $\varphi_i \in (\mathbb{F}_n[x])^*$.

למה 1.2 בסימונים הנ"ל, $C = \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ בסיס של $(\mathbb{F}_n[x])^*$.

הוכחה: כיון ש $(\mathbb{F}_n[x])^*$ איזומורפי ל $\mathbb{F}_n[x]$, מימדם שווה. כידוע, $\dim \mathbb{F}_n[x] = n+1$. לכן, מספיק להראות ש $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ בת"ל. יהי נתון צירוף לינארי שמתאפס:

$$\alpha_0\varphi_0 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = 0$$

כלומר, לכל $f(x) \in \mathbb{F}_n[x]$ מתקיים

$$\alpha_0 f(\gamma_0) + \cdots + \alpha_n f(\gamma_n) = \alpha_0\varphi_0(f(x)) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(f(x)) = (\alpha_0\varphi_0 + \cdots + \alpha_n\varphi_n)(f(x)) = 0(f(x)) = 0.$$

יהי $i \in \{0, \dots, n\}$. ניקח $f(x) \in \mathbb{F}_n[x]$ ששורשיו הם $\gamma_0, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n$ (ו γ_i אינו שורש שלו). למשל, $f(x) = (x - \gamma_0) \cdots (x - \gamma_{i-1})(x - \gamma_{i+1}) \cdots (x - \gamma_n)$. אז

$$\alpha_i f(\gamma_i) = \alpha_0 0 + \cdots + \alpha_{i-1}0 + \alpha_i f(\gamma_i) + \alpha_{i+1}0 + \cdots + \alpha_n 0 = \alpha_1 f(\gamma_1) + \cdots + \alpha_n f(\gamma_n) = 0.$$

כיון ש $f(\gamma_i) \neq 0$, בהכרח $\alpha_i = 0$. הדבר נכון לכל i, ולכן הצירוף הלינארי הוא טריויאלי. ■

כיון ש C בסיס של $(\mathbb{F}_n[x])^*$, יש בסיס $B = \{f_0(x), \dots, f_n(x)\}$ של $\mathbb{F}_n[x]$ כך ש $C = B^*$. בואו נחשב אותו. כדי ש $C = B^*$ יתקיים, דרוש ש

$$f_j(\gamma_i) = \varphi_i(f_j(x)) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

לכל $i, j \in \{0, \dots, n\}$. נקבע $j = 1, \dots, n$ ונמצא את $f_j(x)$. אם ניקח $f(x) = (x - \gamma_0) \cdots (x - \gamma_{j-1})(x - \gamma_{j+1}) \cdots (x - \gamma_n)$ אז יתקיים $f(\gamma_i) = 0$ לכל $i \neq j$ (שזה מצויין), וכן $f(\gamma_j) \neq 0$, שזה כמעט מה שרוצים (רוצים שייצא 1). נותר רק לכפול בסקלר $\frac{1}{f(\gamma_j)}$, לקבל

$$f_j(x) = \frac{1}{f(\gamma_j)} f(x) = \frac{f(x)}{f(\gamma_j)} = \frac{(x - \gamma_0) \cdots (x - \gamma_{j-1})(x - \gamma_{j+1}) \cdots (x - \gamma_n)}{(\gamma_j - \gamma_0) \cdots (\gamma_j - \gamma_{j-1})(\gamma_j - \gamma_{j+1}) \cdots (\gamma_j - \gamma_n)}.$$

נשים לב שמתקיים הדרוש.

מסקנה 1.3 עבור הפולינומים $f_0(x),\dots,f_n(x)$ הנ"ל, מתקיים שלכל פולינום $f(x)\in\mathbb{F}_n[x]$,

$$f(x)=\varphi_0(f(x))f_0(x)+\cdots+\varphi_n(f(x))f_n(x)=f(\gamma_0)f_0(x)+\cdots+f(\gamma_n)f_n(x).$$

הוכחה: אנו יודעים שאם $B=\{v_0,\dots,v_n\}$ בסיס של מרחב וקטורי V ו $B^*=\{\varphi_0,\dots,\varphi_n\}$ הבסיס של V^* הדואלי ל B, אז לכל $v\in V$ מתקיים $v=\varphi_0(v)v_n+\cdots+\varphi_n(v)v_n$. בפרט, הדבר נכון עבור $B,B^*=C$ הנזכרים לעיל. ■

עד כמה שהמסקנה האחרונה נראית פשוטה, היא חשובה ושימושית. זוהי נוסחת האינטרפולציה של לגרנז', והיא נותנת לנו דרך מיידית למצוא, לכל $n+1$ נקודות $(\gamma_0,\delta_0),\dots,(\gamma_n,\delta_n)\in\mathbb{F}^2$ כך ש $\gamma_0,\dots,\gamma_n$ איברים שונים של $\mathbb{F}$, פולינום $f(x)\in\mathbb{F}_n[x]$ העובר דרך נקודות אלה, כלומר מקיים

$$\begin{aligned}f(\gamma_0)&=\delta_0\\ f(\gamma_1)&=\delta_1\\ &\vdots\\ f(\gamma_n)&=\delta_n\end{aligned}$$

לפי המסקנה לעיל, הפולינום הוא

$$f(x)=f(\gamma_0)f_0(x)+\cdots+f(\gamma_n)f_n(x)=\delta_0f_0(x)+\cdots+\delta_nf_n(x),$$

כאשר $f_0(x),\dots,f_n(x)$ הם הפולינומים הקונקרטים שחישבנו לעיל.

לפרטים נוספים, ראה בויקיפדיה:
http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial
http://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_interpolation

2 פיתוח טיילור

את היישום הזה ניתן כתרגיל: יהי $V=\mathbb{F}_n[x]$, ונניח שהמאפיין של $\mathbb{F}$ הוא 0. נקבע $\alpha\in\mathbb{F}$. לכל $i=0,1,\dots,n$ נגדיר $\varphi_i:V\to\mathbb{F}$ על ידי

$$\varphi_i(f(x)):=f^{(i)}(\alpha)$$

לכל $f(x)\in V$. ($f^{(i)}(x)$ הוא הנגזרת ה i של $f(x)$.)

1. הוכח ש $C=\{\varphi_0,\dots,\varphi_n\}\subseteq V^*$ ומהווה בסיס עבורו.
2. מצא את הבסיס $B=\{v_0,\dots,v_n\}$ של V כך ש $C=B^*$.
3. הוכח שהנוסחה $v=\varphi_0(v)v_1+\cdots+\varphi_n(v)v_n$, עבור $v\in V=\mathbb{F}_n[x]$, היא פיתוח טיילור של v. (להגדרת "פיתוח טיילור" ראה ויקיפדיה בעברית).