

מבוא לטופולוגיה – תרגיל 5 (פתרון)

1. יהיו σ ו- τ טופולוגיות על \mathbb{R} כאשר τ מושרת על ידי מטריקה אוקלידית ו- σ היא טופולוגית זורגנפריי. (תזכורת: $\sigma = \{ \cup_{\alpha \in I} [a_\alpha, b_\alpha) \mid a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}, a_\alpha \leq b_\alpha \}$, כאשר אנחנו מתכוונים את כל האחודים האפשריים של הקטעים החצי פתוחים מימין.)

יהיו $s_{\sigma\tau}: (\mathbb{R}, \sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$, $s_{\tau\sigma}: (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \sigma)$ שתי פונקציות כך ש- $s_{\sigma\tau}(x) = s_{\tau\sigma}(x) = x$ לכל $x \in \mathbb{R}$. איזו משתי הפונקציות (או שתיהן) :

(א) רציפה ?

(ב) פתוחה ?

(ג) סגורה ?

(ד) היא הומאומורפיזם ?

נמקו.

פתרון

1.1. קודם כל נוכיח ש- $\tau \subseteq \sigma$.

יהי $U \in \tau$ ו- p נקודה כלשהי ב- U . אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subseteq U$. אבל

$$p \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [p - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{n}, p + \varepsilon) \in \sigma$$

זאת אומרת, נקודה p , דנבחרה שרירותית ב- U היא פנימית ב- U ביחס לטופולוגיה σ . ולכן $U \in \sigma$, משה רוצחנו להוכיח.

(a) $s_{\sigma\tau}$ רציפה כי אם $U \in \tau$ אז $U \in \sigma$ לפי (1.1)

$s_{\tau\sigma}^{-1}([0,1)) = [0,1)$ פתוחה ב- σ ו- $[0,1)$ אינה פתוחה ב- τ .

אינה פתוחה ב- τ .

(b) $s_{\sigma\tau}$ אינה פתוחה כי $[0,1)$ פתוחה ב- σ ו- $s_{\sigma\tau}([0,1)) = [0,1)$

אינה פתוחה ב- τ .

$s_{\tau\sigma}$ פתוחה כי אם $U \in \tau$ אז $U \in \sigma$ $s_{\tau\sigma}(U) = U$ (לפי 1.1)

(c) כיוון ששתי הפונקציות $s_{\sigma\tau}$ ו- $s_{\tau\sigma}$ חח"ע ועל, לכל

תתקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ הן מקיימות את השוויונות:

$$s_{\sigma\tau}(A^c) = s_{\sigma\tau}(A)^c, s_{\tau\sigma}(A^c) = s_{\tau\sigma}(A)^c$$

$$s_{\sigma\tau}^{-1}(A^c) = s_{\sigma\tau}^{-1}(A)^c, s_{\tau\sigma}^{-1}(A^c) = s_{\tau\sigma}^{-1}(A)^c$$

A פתוחה $\Leftrightarrow A^c$ סגורה ו- A סגורה $\Leftrightarrow A^c$ פתוחה (הגדרות).

לכן הפונקציות האלה סגורות אך ורק כשהן פתוחות.

מ-ב) נובע ש- $s_{\sigma\tau}$ אינה סגורה ו- $s_{\tau\sigma}$ סגורה.

(d) $s_{\sigma\tau}$ אינה פתוחה (ב) לכן היא לא הומאומורפיזם

(ההרצאה).

$s_{\tau\sigma}$ אינה רציפה (א) לכן היא לא הומאומורפיזם (ההרצאה).

2. תהי פונקציה $f: (X_1, \tau_1) \rightarrow X(X_2, \tau_2)$ רציפה. $\tau_1 \subseteq \sigma_1, \tau_2 \supseteq \sigma_2$.

תוכיחו: $f: (X_1, \sigma_1) \rightarrow X(X_2, \sigma_2)$ רציפה.

הוכחה

יהי $B \subseteq Y$ ו- $B \in \sigma_2$. אזי $B \in \tau_2$ ולפי הגדרת הרציפות $f^{-1}(B) \in \tau_1$. אז לפי

התנאים $f^{-1}(B) \in \sigma_1$. לפי הגדרת הרציפות $f: (X, \sigma_1) \rightarrow (Y, \sigma_2)$ רציפה.

3. יהיו X, Y, Z מרחבים טופולוגיים ויהיו $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ פונקציות

כך ש- f רציפה בנקודה a , g רציפה בנקודה $f(a)$.

תוכיחו: $g \circ f$ רציפה בנקודה a .

הוכחה

תהי $b = f(a)$ ו- $c = g(b)$. תהי $c \in c$ סביבה של c . כיוון ש-

g – רציפה בנקודה b קיימת סביבה V_b של b כך ש- $g(V_b) \subseteq W_c$. אבל כיוון ש- f רציפה בנקודה a קיימת סביבה U_a של a כך ש- $f(U_a) \subseteq V_b$. לכן: $g \circ f(U_a) = g(f(U_a)) \subseteq g(V_b) \subseteq W_c$ ז"א $g \circ f$ רציפה בנקודה a , מצ"ל.

4. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים כך שלכל שתי נקודות $b_1 \neq b_2$ ב- Y קיימות סביבות $b_1 \in V_1 \subseteq Y$ ו- $b_2 \in V_2 \subseteq Y$ הלא נחתכות, ז"א, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. (במקרה כזה אומרים ש- Y הוא מרחב האוסדורף.) יהיו $f, g: X \rightarrow Y$ שתי העתקות הרציפות. תוכיחו שהקבוצה $F = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ היא קבוצה סגורה ב- X .

הוכחה.

מספיק להוכיח שקבוצה $F^c = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ פתוחה. יהי $a \in F^c$ אזי $f(a) = b_1 \in Y$ ו- $g(a) = b_2 \in Y$ כאשר $b_1 \neq b_2$. מהתנאים (Y הוא מרחב האוסדורף) קיימות סביבות $b_1 \in V_1 \subseteq Y$ ו- $b_2 \in V_2 \subseteq Y$ כך ש- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. מרצחפותן של f ו- g נובע שקיימות סביבות $a \in U_1 \subseteq X$ ו- $a \in U_2 \subseteq X$ כך ש- $f(U_1) \subseteq V_1$ ו- $g(U_2) \subseteq V_2$. נסמן $U = U_1 \cap U_2$. אזי $a \in U$, ו- $f(U) \subseteq V_1$ ו- $g(U) \subseteq V_2$. מכיוון ש- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $a \in U \subseteq F^c$, ז"א a נקודה פנימית של F^c . אז F^c פתוחה ו- F סגורה. ■

5. תוכיחו תכונות בסיסיות של סגור ופנים

(אפילו אם חלקן הוכח בהרצאה):

- (a) $A \subseteq \bar{A}$
- (b) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$
- (c) \bar{A} קבוצה סגורה
- (d) אם F קבוצה סגורה ו- $A \subseteq F$ אזי $\bar{A} \subseteq F$
- (e) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
- (f) $\bar{A} = A \Leftrightarrow A$ סגורה
- (g) נקודה p שייכת ל- $\bar{A} \Leftrightarrow$ כל סביבה של p נחתכת עם A .
- (h) A° קבוצה פתוחה.

- (i) A° היא קבוצה של כל הנקודות הפנימיות ב- A .
 (j) אם U קבוצה פתוחה ו- $U \subseteq A$ אזי $U \subseteq A^\circ$ (רמז: סדר נכון של הוכחת הסעיפים יקל את העבודה)

הוכחה

תזכורת, הגדרה. יהי X מ"ט. הקבוצה

$$\bar{A} = \bigcap_{F \supseteq A, F \text{ סגורה}} F$$

- (c) \bar{A} -סגורה כחיתוך סגורות.
 (a) כל איברי החיתוך מכילים A . אז גם החיתוך עצמו מכיל A .
 (d) F אחד מאיברי החיתוך \bar{A} ולכן מכיל אותו.
 (b) יהי $A \subseteq B$. גורר $A \subseteq \bar{B}$. \bar{B} סגורה לפי (c).
 ולכן $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ לפי (d).
 (f) $A \subseteq A, A \subseteq \bar{A} = A$ סגורה לפי (c).
 $A \subseteq A, A \subseteq \bar{A}$ סגורה \Leftarrow לפי (d), $A \subseteq \bar{A}$ לפי (a).
 ו-(f,c) גוררים (e).
 (g) \Leftarrow נניח $p \in \bar{A}$ ו-(בדרך השלילה) קיימת סביבה U של p כך
 ש- $U \cap A = \emptyset$. אזי U^c סגורה ו- $A \subseteq U^c$. אז לפי (d) $\bar{A} \subseteq U^c$
 ולכן- $p \in U^c$. סתירה.
 \Rightarrow נניח כל סביבה של p נחתכת עם A ו-(בדרך השלילה)
 $p \notin \bar{A}$. אזי לפי (c) \bar{A} קבוצה סגורה ולכן $(\bar{A})^c$
 פתוחה. מכיוון ש- $p \in (\bar{A})^c$ אמורה להיחתך
 עם A , אבל זה לא יכול להיות כי $(\bar{A})^c \subseteq A^c$ לפי "a". סתירה.
 (h) A° קבוצה פתוחה כאחוד הפתוחות.
 (i) אם $p \in A^\circ$ אז לפי הגדרה $A^\circ \subseteq A$ ו- $p \in A$. אבל לפי (h) A°
 פתוחה, אזי p נקודה פנימית ב- A .
 הפוך: אם p נקודה פנימית ב- A ת אזי קיימת קבוצה U פתוחה כך
 ש- $p \in U \subseteq A$. לכן $p \in A^\circ$ לפי הגדרת הפנים.
 (j) אם U קבוצה פתוחה ו- $U \subseteq A$ אזי $U \subseteq A^\circ$ כי A° איחוד של כל
 הקבוצות הפתוחות המוכלות ב- A (הגדרת הפנים).

6. תהי A תת-קבוצה במרחב טופולוגי.
 א) תוכיחו: $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

הוכחה

$$(A^\circ)^c = \left(\bigcup_{U \subseteq A \text{ פתוחה}} U \right)^c = \bigcap_{U \subseteq A \text{ פתוחה}} U^c = \bigcap_{U^c \supseteq A^c \text{ סגורה}} U^c = \bigcap_{F \supseteq A^c \text{ סגורה}} F = \overline{A^c}$$

ב) תוכיחו ש- $\bar{A} - A^\circ$ קבוצה סגורה.

הוכחה

$\bar{A} - A^\circ = \bar{A} \cap (A^\circ)^c$
 A° - פתוחה, לכן $(A^\circ)^c$ - סגורה. כיוון ש- \bar{A} - סגורה,
 $\bar{A} - A^\circ$ - סגורה כחתוך של שתי קבוצות סגורות, מצ"ל.

7. תהי $f: X \rightarrow Y$ הומאומורפיזם. תוכיחו:

א) $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$
 ב) $f(A^\circ) = (f(A))^\circ$

הוכחה

נסמן ב- τ_X, τ_Y טופולוגיות במרחבים X, Y בהתאם.
 תהי $\hat{f}: \tau_X \rightarrow \tau_Y$ העתקה כך ש- לכל $U \in \tau_X: \hat{f}(U) = f(U)$. לפי הגדרת ההומאומורפיזם \hat{f} היא העתקה חח"ע ועל. או במילים אחרות:
 $U \in \tau_X \Leftrightarrow f(U) \in \tau_Y$, וזה מייד גורר "ב".
 אם F סגורה ב- X אז $F^c \in \tau_X$ ו-
 $F^c \in \tau_X \Leftrightarrow f(F^c) \in \tau_Y$. כיוון ש- f חח"ע ועל,
 אנחנו נעבור למשלמים ונקבל מזה:
 $F \text{ סגורה} \Leftrightarrow f(F) \in \tau_Y$, וזה מייד גורר "א".