תרגיל 4

1. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים:

(א)

$$R = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{\langle x^2\rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{\langle x^2-1\rangle}$$

(ב)

$$R = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/_{\langle xy-1\rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/_{\langle x^2+y^2-1\rangle}$$

פתרון:

i. בכל אחד מהחוגים יש 4 איברים: $0,1,x,1+x$. נכתוב את טבלת עבור כל אחד מהחוגים:

R:

$\cdot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	0	x
$x+1$	0	$x+1$	x	1

S:

$\cdot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	1	$x+1$
$x+1$	0	$x+1$	$x+1$	0

החיבור בשניהם הוא מודולו 2. קל לראות שאם נגדיר את העתקה הבאה: φ : $R \to S$ ע"י $\varphi(0)0, \varphi(1) = 1, \varphi(x) = x+1, \varphi(x+1) = x$ ההעתקה תשמור חיבור וכפל, ולכן נקבל איזומורפיזם.

2. הוכיחו שהחוגים הבאים אינם איזומורפיים:

$$R = {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\langle x^2\rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\langle x^2-1\rangle}$$

פתרון:

ראשית, נשים לב שבR יש איבר נלפוטנט: x. נוכיח ש$S \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, ולכן אין בו איברים נלפוטנטים. ובכן, האיברים בS הם מהצורה $a + bx$ כאשר $a, b \in \mathbb{Q}$ ו$x^2 = 1$. נגדיר את ההעתקה הבאה: $\varphi(a + bx) = (a + b, a - b)$. קל לראות שזה חח"ע, על שומר חיבור ואיבר יחידה. נוכיח שההעתקה שומרת כפל:

$$\varphi((a+bx)(c+dx)) = \varphi(ac+bd+(bc+ad)x) = (ac+bc+ad+bd, ac+bd-ad-bc)$$

$$\varphi(a+bx)\varphi(c+dx) = (a+b, a-b)(c+d, c-d) = (ac+bc+ad+bd, ac+bd-ad-bc)$$

3. הוכיחו: $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]/5\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
פתרון:

ראשיתת נבנה אפימורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. ובכן, 1 חייב ללכת ל1, ולכן מחיבוריו: לכל $n \in \mathbb{Z}$ $\varphi(n) = n \mod 5$. בפרט, $\varphi(3) = 3 \mod 5$. $\frac{1}{3}$ צריך ללכת להופכי של 3. יש רק אחד כזה, 2. לכן $\varphi(\frac{1}{3}) = 2 \mod 5$. מכאן נקבל את הנוסחא הכללית: $\varphi(\frac{n}{3^i}) = n \cdot 2^i \mod 5$.

ובכן, קל לראות שההעתקה על. נוכח שהיא אכן הומומורפיזם.

יחידה: $\varphi(1) = \varphi(\frac{1}{3^0}) = 1 \cdot 2^0 \mod 5 = 1 \mod 5$.

כפליות: $\varphi(\frac{n}{3^i})\varphi(\frac{m}{3^j}) = n2^i \mod 5m2^j \mod 5 = nm2^{i+j} \mod 5 = \varphi(\frac{nm}{3^{i+j}}) = \varphi(\frac{n}{3^i} \cdot \frac{m}{3^j})$

חיבוריות: $\varphi(\frac{n}{3^i} + \frac{m}{3^j}) = \varphi(\frac{n3^j + m3^i}{3^{i+j}}) = (n3^j + m3^i)2^{i+j} \mod 5 = n2^i6^j + m2^j6^i \mod 5 = n2^i + m2^j \mod 5 = n2^i \mod 5 + m2^j \mod 5 = \varphi(\frac{n}{3^i}) + \varphi(\frac{m}{3^j})$

כעת נוכיח ש$\ker\varphi = 5\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$

$\supseteq$: יהי איבר ב$5\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$. הוא מהצורה $\frac{5n}{3^i}$. מתקיים: $\varphi(\frac{5n}{3^i}) = 5n2^i \mod 5 = 0 \mod 5$.

$\subseteq$: יהי $\frac{n}{3^i} \in \ker\varphi$. כלומר, $0 \mod 5 = \varphi(\frac{n}{3^i}) = n2^i \mod 5$. זה אומר ש$5|n2^i$. אבל 5 ו2 זרים, לכן $5|n$. כלומר, $n = 5m \Longleftarrow \frac{n}{3^i} \in 5\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$.

4. קבעו האם החוגים הבאים הם שדות. נמקו את קביעתכם.

(א) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$

(ב) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+2\rangle$

פתרון:

i. ראשית, נשים לב שהאיברים בחוג הם מהצורה $a+bx$ כאשר $a,b\in\mathbb{Z}_3$, ו$x^2=-1=2$. ברור שהחוג קומוטטיבי. נמצא לכל איבר שונה מ0 הופכי.

$$1^{-1}=1$$
$$2^{-1}=2$$
$$x^{-1}=2x$$
$$(2x)^{-1}=x$$
$$(1+x)^{-1}=2+x$$
$$(2+x)^{-1}=1+x$$
$$(1+2x)^{-1}=2+2x$$
$$(2+2x)^{-1}=1+2x$$

ii. ראשית, נשים לב שהאיברים בחוג הם מהצורה $a+bx$ כאשר $a,b\in\mathbb{Z}_3$ ו$x^2=-2=1$. ברור שהחוג קומוטטיבי. אולם, נראה שיש בחוג מחלקי 0 ולכן אינו שדה. ובכן $1+x, 2+x$ שונים מ0 בחוג המנה, כי אינם שייכים לאידיאל. אולם, $(1+x)(2+x)=x^2+2\equiv 0$.

5. יהי $\varphi : R\to S$ הומומורפיזם של חוגים ו$I\trianglelefteq S$ אידיאל מקסימלי. הוכיחו/הפריכו: $\varphi^{-1}(I)$ אידיאל מקסימלי של R.

פתרון:

$R=\mathbb{Z}, S=\mathbb{Q}$, $I=\{0\}$ אידיאל מקסימלי ב$\mathbb{Q}$. ו$\varphi : R\to S$ העתקת ההכלה. אז $\varphi^{-1}(\{0\})=\{0\}$ שאינו אידיאל מקסימלי ב$\mathbb{Z}$.

6. תנו דוגמא לחוגים R,S, אפימורפיזם $\varphi : R\to S$ ואידיאל מקסימלי $I\trianglelefteq R$ אידאל מקסימלי, כך ש$\varphi(I)=S$.

פתרון:

$S=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, R=\mathbb{Z}$, $I=2\mathbb{Z}$. $\varphi : R\to S$ ההטלה הטבעית. ידוע ש I מקסימלי בR. נראה שלכל איבר בS יש מקור בI. ובכן, $\varphi(2)=2, \varphi(4)=1, \varphi(0)=0$.