פתרון תרגיל 10 – מופשטת 1

<u>שאלה 1</u>

נניח ש- $\varphi:H\to G$, $\psi:G\to H$ הומומורפיזמים כך ש- $\psi\circ\varphi=Id_H$. הוכיחו:

א) φ חח"ע, ψ על.

ב) $G=Ker(\psi)\rtimes Im(\varphi)$.

<u>פתרון</u>

א) טריוויאלי, לפי טיעונים מבדידה.

ב) נסמן $K=\ker(\psi),Q=\mathrm{Im}(\varphi)$. לפי ההגדרה מתקיים $K\triangleleft G,Q\le G$. תחילה נראה כי $K\cap Q=\{1\}$. יהי $x\in K\cap Q$. אזי קיים $h\in H$ עבורו $x=\varphi(h)$. מכיוון ש- $x\in K$ מתקיים $\psi(\varphi(h))=h\wedge\psi(\varphi(h))=1$ ולכן $h=1$ ולכן $x=1$. נותר להראות ש- $G=KQ$. יהי $g\in G$. אזי הוא ניתן להצגה הבאה:
$g=g\varphi\left(\psi\left(g^{-1}\right)\right)\cdot\varphi\left(\psi\left(g\right)\right)$ (בדקו שאכן מתקבל g!). האיבר הימני בוודאי שייך ל-Q. האיבר השמאלי במכפלה שייך ל-K, שכן
$\psi\left(g\varphi\left(\psi\left(g^{-1}\right)\right)\right)=\psi\left(g\right)\psi\left(\varphi\left(\psi\left(g^{-1}\right)\right)\right)=\psi\left(g\right)\psi\left(g^{-1}\right)=\psi\left(1\right)=1$.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

א) תהיינה K,Q חבורות. $\theta:Q\to Aut(K)$ הומומורפיזם. הוכיחו ש- $K\rtimes_\theta Q$ היא חבורה.

ב) הראו שאם K אינה אבלית או Q אינה אבלית אז $K\rtimes_\theta Q$ אינה אבלית.

ג) הראו שאם $\theta:Q\to Aut(K)$ אינו ההומומורפיזם הטריוויאלי אז $K\rtimes_\theta Q$ אינה אבלית גם אם K ו Q אבליות.

<u>פתרון</u>

א) סגירות הפעולה: ברור.

אסוציאטיביות:

$$\left(\left(k_1,q_1\right)\left(k_2,q_2\right)\right)\left(k_3,q_3\right)=\left(k_1\theta_{q_1}\left(k_2\right),q_1q_2\right)\left(k_3,q_3\right)=\left(k_1\theta_{q_1}\left(k_2\right)\theta_{q_1q_2}\left(k_3\right),q_1q_2q_3\right)$$

$$\left(k_1,q_1\right)\left(\left(k_2,q_2\right)\left(k_3,q_3\right)\right)=\left(k_1,q_1\right)\left(k_2\theta_{q_2}\left(k_3\right),q_2q_3\right)=\left(k_1\theta_{q_1}\left(k_2\theta_{q_2}\left(k_3\right)\right),q_1q_2q_3\right)=$$

)

$$=\left(k_1\theta_{q_1}\left(k_2\right)\theta_{q_1}\left(\theta_{q_2}\left(k_3\right)\right),q_1q_2q_3\right)=\left(k_1\theta_{q_1}\left(k_2\right)\theta_{q_1q_2}\left(k_3\right),q_1q_2q_3\right)$$

שימו לב שמתקיים $\theta_a\theta_b=\theta\left(a\right)\theta\left(b\right)=\theta\left(ab\right)$ מכיוון ש- θ הוא הומומורפיזם.)

איבר יחידה: $\left(1_K,1_Q\right)$. קל לבדוק שאכן מתקיים
$\left(1_K,1_Q\right)\left(k,q\right)=\left(k,q\right)\left(1_K,1_Q\right)=\left(k,q\right)$.

הופכי: ההופכי של $\left(k,q\right)$ הוא האיבר $\left(\theta_{q^{-1}}\left(k^{-1}\right),q^{-1}\right)$ (בדקו!)

ב) אם K אינה אבלית אזי קיימים $k_1,k_2\in K$ כך ש- $k_1k_2\neq k_2k_1$. מכאן $(k_1,1)(k_2,1)=(k_1k_2,1)\neq(k_2k_1,1)=(k_2,1)(k_1,1)$. באותו האופן החבורה לא אבלית אם Q אינה אבלית.

ג) אם $\theta:Q\to Aut(K)$ אינו ההומומורפיזם הטריוויאלי אזי קיימים $k\in K$, $q\in Q$ עבורם $\theta_q(k)\neq k$. ולכן מתקיים

$(k,1_Q)(1_K,q)=\left(k\theta_{1_Q}(1_K),q\right)=(k,q)\neq(\theta_q(k),q)=(1_K\theta_q(k),q)=(1_K,q)(k,1_Q)$.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

רשמו את משוואת המחלקות עבור החבורות S_3,S_4,S_5,D_4,Q_8.

למשל: משוואת המחלקות של D_6 היא $12=2+3+3+2+2$.

<u>פתרון</u>

עבור $n\geq 3$ $Z(S_n)$ טריוויאלי. מחלקת צמידות נתונה ב S_n מורכבת מכל התמורות בעלות מבנה מחזורים זהה עבור איזשהו מבנה מחזורים.

משוואת המחלקות של S_3 היא $6=1+2+3$. במחלקת הצמידות $\{(--)\}$ שלושה איברים ובמחלקת הצמידות $\{(---)\}$ שני איברים.

משוואת המחלקות של S_4 היא $24=1+6+8+6+3$. כאשר בכל אחת ממחלקות הצמידות $\{(----)\},\{(--)\}$ שישה איברים, במחלקת הצמידות $\{(---)\}$ שמונה איברים ובמחלקת הצמידות $\{(--)(--)\}$ שלושה איברים.

מהי משוואת המחלקות של S_5? גודל מחלקת הצמידות $\{(--)\}$ הוא $\binom{5}{2}=10$.

גודל מחלקת הצמידות $\{(---)\}$ הוא $\binom{5}{3}2!=20$. גודל מחלקת הצמידות

$\{(----)\}$ הוא $\binom{5}{4}3!=30$. גודל מחלקת הצמידות $\{(-----)\}$ הוא $4!=24$

גודל מחלקת הצמידות $\{(--)(--)\}$ הוא $\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{2}=15$. גודל מחלקת הצמידות

$\{(---)(--)\}$ הוא $\binom{5}{3}2!=20$.

מכאן משוואת המחלקות של S_5 היא $120=1+10+20+30+24+15+20$.

מהי משוואת המחלקות של D_4,Q_8?

הוכחנו בתרגול את הטענה הבאה: עבור חבורת- p לא אבלית G מסדר p^3 מתקיים $|Z(G)|=p$ וגם לכל $a\notin Z(G)$ מתקיים $|conj(a)|=p$. מכאן כל מחלקת צמידות מגודל $1<$ היא מגודל p ומשוואת המחלקות של חבורה מסוג זה היא:

$p^3=\underbrace{p+p+\cdots+\cdots+p}_{p^2\ \ times}$. בפרט אצלנו D_4,Q_8 לא אבליות מסדר $8=2^3$ לכן משוואת המחלקות של כל אחת מהן היא: $8=2+2+2+2$.
מש"ל

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו שלכל הומומורפיזם $\theta:\mathbb{Z}_2\to Aut(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)$ מתקיים $\left(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2\cong{\mathbb{Z}_2}^3$ או $\left(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2\cong D_4$.

<u>פתרון</u>

אם θ ההומומורפיזם הטריוויאלי מקבלים בדיוק מכפלה ישרה של $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ ב $\mathbb{Z}_2$ כלומר את ${\mathbb{Z}_2}^3$. מצד שני עבור כל הומומורפיזם θ שאינו טריוויאלי (ויש כאלה, ראינו למשל אחד בתרגול) מתקיים $\left(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2$ אינה אבלית (עפ"י שאלה 2 סעיף ג'). יהי θ הומומורפיזם שאינו טריוויאלי, אזי $\left(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2$ חבורה מסדר 8 והיא אינה אבלית. לכן $\left(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2$ איזומורפית ל-D_4 או ל-Q_8.
נראה שב-$\left(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2$ לפחות שני איברים מסדר 2 ומכאן $\left(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2\cong D_4$.
לכל הומומורפיזם $\theta:\mathbb{Z}_2\to Aut(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)$ מתקיים $\theta_0=Id_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$. נקבל ש $\left((1,0),0\right)\left((1,0),0\right)=\left((1,0)+\theta_0(1,0),0+0\right)=\left((1,0)+(1,0),0\right)=\left((0,0),0\right)$ ובאופן דומה מראים ש$\left((1,1),0\right)\left((1,1),0\right)=\left((0,0),0\right)$. מצאנו שני איברים מסדר 2 כדרוש.
מש"ל

<u>שאלת בונוס</u>

נתבונן בתת חבורה $H=\left\langle(123),(456)\right\rangle\le S_6$.

א) תארו את המְרַכֵּז $C_{S_6}\left(H\right)$.

ב) הוכיחו שמתקיים $N_{S_6}\left(H\right)=\left\langle H,(56),(23),(14)(25)(36)\right\rangle$.

ג) הוכיחו שמתקיים $N_{S_6}\left(H\right)\big/C_{S_6}\left(H\right)\cong D_4$.

<u>פתרון</u>

א) איבר במרכז מצמיד את (123) לעצמו, ואת (456) לעצמו. על מנת לחשב את המרכז של איבר, יש לבחון את כל האפשרויות לכתוב אותו מתחת לעצמו, תוך שימור מבנה המחזורים. ישנן $3\cdot3!$ אפשרויות לעשות זאת עם (123) והמרכז שלו הוא $\left\langle(123),(45),(56)\right\rangle$. המרכז של (456) הוא $\left\langle(12),(23),(456)\right\rangle$. החיתוך של שניהם הוא H.

ב) במנרמל נמצאים האיברים שמצמידים את (123) לכל אחד מהצמודים שלו בחבורה, כלומר ל- $(123),(132),(456),(465)$ (שכן, הצמדה שומרת על מבנה המחזורים). באופן דומה, איבר במנרמל חייב להצמיד את (456) לאחר מהאיברים הללו. כעת נשים לב ש- (123)ו-(456) יוצרים שתי תתי חבורות ציקליות זרות, אזי גם הצמודים שלהם צריכים לקיים את התכונה הזאת. זה משאיר $4\cdot2=8$ אפשרויות, שזהו מספר האיברים ב-

. לכן המנרמל נוצר על ידי H ועל ידי האיברים $(23),(56)$ ו- $N_{S_6}(H)/C_{S_6}(H)$
$(14)(25)(36)$.

ג) כזכור $N_{S_6}(H)/C_{S_6}(H) \cong \{\gamma_g|_H : g \in S_6\} \le Aut(H)$. מהדיון בסעיף ב'
$\left|\{\gamma_g|_H : g \in S_6\}\right| = 8$ ולכן אכן $\left|N_{S_6}(H)/C_{S_6}(H)\right| = 8$. קל לראות
ש $N_{S_6}(H)/C_{S_6}(H)$ אינה אבלית ושיש בה לפחות שני איברים מסדר 2 ומכאן היא החבורה D_4.
דרך אחרת להסביר מדוע החבורה מסדר 8 שקיבלנו היא D_4 - נסמן
$x = (23)H$, $y = (56)H$, $z = (14)(25)(36)H$. איברים אלה מקיימים את
היחסים $x^2 = y^2 = z^2 = 1$, $xy = yx$ וכן $zxz^{-1} = y$ ו- $zyz^{-1} = x$. לכן $\langle z\rangle \cong \mathbb{Z}_2$
ו $\langle x, y\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
ניתן להגדיר הומומורפיזם $\theta : \langle z\rangle \to Aut(\langle x, y\rangle)$ ע"י $\theta_z(a) = zaz^{-1}$ נשים לב
שבזכות היחסים $zxz^{-1} = y$ ו- $zyz^{-1} = x$ נקבל
ש $\theta_z(1) = 1, \theta_z(x) = y, \theta_z(y) = x, \theta_z(xy) = yx = xy$. זהו לא הומומורפיזם טריויאלי
וברור שהחבורה שלנו איזומורפית ל $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ (איך?)
ומכיון שההומורפיזם אינו טריויאלי אז עפ"י מה שהוכחנו בשאלה 4 זאת בדיוק החבורה D_4.

מש"ל