פתרון תרגיל בית 4 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1.

א. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{F}_2[x]}/_{\left\langle x^2\right\rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{F}_2[x]}/_{\left\langle x^2-1\right\rangle}$$

ב. הוכיחו שהחוגים הבאים **לא** איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\left\langle x^2\right\rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\left\langle x^2-1\right\rangle}$$

ג. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/_{\langle xy-1\rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/_{\left\langle x^2+y^2-1\right\rangle}$$

פתרון.

א. נשים לב שיש איזומורפיזם $\varphi : \mathbb{F}_2[x] \to \mathbb{F}_2[x]$ לפי $\varphi(f(x)) = f(x+1)$. מתקיים $\varphi\left(x^2\right) = (x+1)^2 = x^2-1$ (כי אנחנו עובדים במאפיין 2), ולכן גם $\varphi\left(\left\langle x^2\right\rangle\right) = \left\langle x^2-1\right\rangle$. זה משרה איזומורפיזם ${}^{\mathbb{F}_2[x]}/_{\left\langle x^2\right\rangle} \cong {}^{\varphi(\mathbb{F}_2[x])}/_{\varphi(\left\langle x^2\right\rangle)} = {}^{\mathbb{F}_2[x]}/_{\left\langle x^2-1\right\rangle}$ (המעברים לא היו נכונים אם φ לא היה איזומורפיזם).

ב. לפי משפט השאריות הסיני, כיוון שהאידאלים $\langle x+1\rangle$ ו-$\langle x-1\rangle$ קו-מקסימליים, מתקיים

$$S = {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\left\langle x^2-1\right\rangle} = {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\langle (x+1)(x-1)\rangle} \cong {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\langle x+1\rangle} \times {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\langle x-1\rangle} \cong \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$$

כשהמעבר האחרון מסתמך על הומומורפיזם ההצבה שראינו בתרגול. לכן ב-S אין איברים נילפוטנטים (ודאו!). מצד שני, ב-R האיבר $x + \left\langle x^2\right\rangle$ הוא נילפוטנטי מסדר 2, ולכן R ו-S לא איזומורפיים.

ג. נשים לב כי $x^2+y^2-1 = (x+iy)(x-iy)-1$. לכן נגדיר הומומורפיזם $\varphi : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$ לפי $\varphi(f(x,y)) = f(x+iy, x-iy)$. ודאו שאתם מבינים מדוע φ הומומורפיזם. נראה ש-φ איזומורפיזם על ידי כך שנמצא את ההופכי שלו: $\psi : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$ המוגדר לפי $\psi(g(x,y)) = g\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2i}\right)$. זה אכן הומומורפיזם. כדי להראות ש-$\varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[x,y]}$, מספיק לבדוק שזה מתקיים

על היוצרים x ו-y. אכן,

$$\varphi\left(\psi\left(x\right)\right)=\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{x+iy+x-iy}{2}=x$$
$$\psi\left(\varphi\left(x\right)\right)=\psi\left(x+iy\right)=\frac{x+iy}{2}+i\cdot\frac{x-iy}{2i}=x$$
$$\varphi\left(\psi\left(y\right)\right)=\varphi\left(\frac{x-y}{2i}\right)=\frac{x+iy-x+iy}{2i}=y$$
$$\psi\left(\varphi\left(y\right)\right)=\psi\left(x-iy\right)=\frac{x+y}{2}-i\cdot\frac{x-y}{2i}=y$$

זה מראה ש-φ איזומורפיזם. כעת נשים לב כי

$$\varphi\left(xy-1\right)=\left(x+iy\right)\left(x-iy\right)-1=x^2+y^2-1$$

ולכן $\varphi\left(\left\langle xy-1\right\rangle\right)=\left\langle x^2+y^2-1\right\rangle$. כמו בסעיף הראשון, זה מראה ששני החוגים איזומורפיים.

שאלה 2. יהי $\mathbb{H}$ חוג הקווטרניונים של המילטון.

א. הוכיחו כי $\mathbb{H}$ אינו איזומורפי לחוג $M_2(\mathbb{R})$. שימו לב שזה מפתיע, כי שניהם חוגים פשוטים ושהם איזומורפיים כמרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$ (שניהם ממימד 4).

ב. רשות: הוכיחו שהחוג

$$R=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ \overline{y} & \overline{x}\end{pmatrix}\middle|\, x,y\in\mathbb{C}\right\}$$

איזומורפי לחוג $M_2(\mathbb{R})$. רמז: הראו שהחוגים האלו צמודים כתת־חוגים של $M_2(\mathbb{C})$. בדרך אחרת, למי שמכיר, מצאו מערכת של יחידות מטריצה ובנו את האיזומורפיזם בינהם בעזרתה.

פתרון.

א. כפי שאנחנו יודעים, $\mathbb{H}$ הוא חוג עם חילוק. לעומת זאת, $M_2\left(\mathbb{R}\right)$ הוא לא חוג עם חילוק, כי יש בו מחלקי אפס.

ב. המטרה שלנו תהיה למצוא מטריצה הפיכה P שתצמיד את $M_2\left(\mathbb{R}\right)$ ל-R. כלומר $R=PM_2\left(\mathbb{R}\right)P^{-1}$. נסמן $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, כשמראש נניח $ad-bc=1$. אז $P^{-1}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$. נרצה שיתקיים

$$P\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}-ac & a^2\\ -c^2 & ac\end{pmatrix}\in R$$

לכן $ac=-\overline{ac}$, כלומר ac מדומה טהור, וגם $\overline{a^2}=-c^2$, לכן $\overline{a}=\pm ic$. תנאים דומים מתקיימים על b ו-d אם נשתמש במטריצה $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. לבסוף,

$$P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad & -ab\\ cd & -bc\end{pmatrix}\in R$$

ולכן רוצים גם $\overline{ad}=-bc$ ו-$\overline{ab}=-cd$.
עכשיו כל מה שנותר הוא למצוא ארבעה מספרים מרוכבים $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ שיקיימו את התנאים האלו. מוזמנים להשתכנע שאפשר לבחור

$$P=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1+i & 1-i\\ 1-i & 1+i\end{pmatrix}$$

ולקבל את הדרוש.

שאלה 3. ראינו שעבור קבוצה X, אז $(P(X),\triangle,\cap)$ הוא חוג בוליאני. בתרגיל בית 1 הוכחתם שכל חוג בוליאני הוא חילופי. ננסה להוכיח את הכיוון ההפוך: כל חוג בוליאני A משוכן בחוג מן הצורה $(P(X),\triangle,\cap)$.

א. הוכיחו שלכל $a\in A$ מתקיים $a+a=0$ (ובפרט המאפיין של A הוא 2).

ב. הוכיחו שהשדה היחיד שהוא גם חוג בוליאני הוא $\mathbb{F}_2$.

ג. הוכיחו שלכל אידאל מקסימלי $M\lhd A$ מתקיים $A/M\cong\mathbb{F}_2$.

ד. יהי $M\lhd A$ אידאל מקסימלי ויהי $a\in A$. הוכיחו כי $a\in M$ או $1-a\in M$, אבל לא שניהם.

ה. יהי $0\neq a\in A$. הוכיחו שקיים אידאל מקסימלי $M\lhd A$ שאינו מכיל את a.

ו. תהי X קבוצת כל האידאלים המקסימליים של A. הוכיחו שההעתקה $\varphi\colon A\to(P(X),\triangle,\cap)$ השולחת איבר $a\in A$ לקבוצת כל האידאלים המקסימליים שלא מכילים אותו היא שיכון של חוגים.

פתרון.

א. יהי $a\in A$. כיוון ש-A חוג בוליאני, $a^2=a$ וגם

$$a+1=(a+1)^2=a^2+2a+1=3a+1$$

ולכן $2a=0$.

ב. יהי F שדה שהוא חוג בוליאני, ויהי $x\in F$. לכן $x^2=x$, כלומר $x\left(x-1\right)=0$, אבל בשדה אין מחלקי אפס ולכן $x=0$ או $x=1$. זה מראה שהאופציה היחידה היא $F=\mathbb{F}_2$.

ג. יהי M אידאל מקסימלי של A. לפי משפט, A/M הוא שדה. כמו כן, הוא גם חוג בוליאני כי לכל $a+M\in A/M$,

$$\left(a+M\right)^2=a^2+M=a+M\,.$$

לפי הסעיף הקודם, $A/M\cong\mathbb{F}_2$.

ד. נניח כי $a\notin M$. נתבונן בחוג המנה A/M. מהסעיף הקודם, $A/M\cong\mathbb{F}_2$, ולכן יש בו רק שני איברים – $A/M=\{0+M,1+M\}$. $a\notin M$ אומר ש-$a+M=1+M$, אבל אז $(1-a)+M=0+M$, ולכן $1-a\in M$.

ה. יהי $0\neq a\in A$. האיבר היחיד ב-A שהוא הפיך הוא 1 (כי אם $x\in A$ הפיך אז $x^2=x$ גורר ש-$x=1$). לכן $a-1$ אינו איבר הפיך ב-A. לפי משפט, יש אידאל מקסימלי M שמכיל אותו. אבל אז לא יכול להיות ש-$a\in M$, אחרת $1=(1-a)+a\in M$.

ו. צריך להוכיח ש-φ הומומורפיזם וגם חח"ע.

- φ מכבדת חיבור: יהיו $a,a'\in A$. רוצים להוכיח כי $\varphi\left(a+a'\right)=\varphi\left(a\right)\triangle\varphi\left(a'\right)$. אכן, $\varphi\left(a+a'\right)$ מכיל את כל האידאלים המקסימליים של A שאינם מכילים את $a+a'$. אם אידאל מכיל את a ואת a', ודאי שהוא מכיל את $a+a'$; אם הוא לא מכיל את a ולא את a', לפי סעיף ד' הוא מכיל את $1-a$ ואת $1-a'$ ולכן גם את $a+a'=(1-a)+(1-a')$; ושכנעו את עצמכם שאם הוא מכיל בדיוק אחד ולא את השני אז הוא לא מכיל את הסכום.
- φ מכבדת כפל: יהיו $a,a'\in A$. רוצים להוכיח כי $\varphi\left(aa'\right)=\varphi\left(a\right)\cap\varphi\left(a'\right)$. כל אידאל מקסימלי שלא מכיל את a ולא את a' לא יכיל גם את aa' (כי הוא ראשוני); מצד שני, כל אידאל מקסימלי שלא מכיל את aa' לא יכיל לא את a ולא את a' (מהבליעה של אידאל).

- $\varphi(1)=P(X)$: כל אידאל מקסימלי של X לא מכיל את 1.

נותר להוכיח ש-φ חח"ע. יהי $a\in A$ עם $\varphi(a)=0$. זה מראה שכל אידאל מקסימלי מכיל את a. אבל אם $a\neq 0$, $a-1$ לא הפיך ב-A, ולכן יש אידאל מקסימלי שמכיל אותו, בסתירה.

שאלה 4. יהי R חוג, ויהי $P\lhd R$ אידאל. נזכר ש-P הוא ראשוני אם לכל $A,B\lhd R$ המקיימים $AB\subseteq P$, אז $A\subseteq P$ או $B\subseteq P$. הוכיחו שתנאים הבאים שקולים:

א. P הוא ראשוני.

ב. לכל $a,b\in R$ אם מכפלת האידאלים הראשיים $\langle a\rangle\langle b\rangle\subseteq P$, אז $a\in P$ או $b\in P$.

ג. לכל $A,B\leq_l R$ אידאלים שמאליים המקיימים $AB\subseteq P$, אז $A\subseteq P$ או $B\subseteq P$.

ד. לכל $A,B\leq_r R$ אידאלים ימניים המקיימים $AB\subseteq P$, אז $A\subseteq P$ או $B\subseteq P$.

פתרון. ראשית, נשים לב ש-$\boxed{\text{ג,ד} \Leftarrow \text{א}}$, כי כל אידאל (דו-צדדי) הוא בפרט אידאל שמאלי ואידאל ימני.

- $\boxed{\text{א} \Leftarrow \text{ב}}$ נניח ש-P ראשוני, ויהיו $a,b\in R$ כך ש-$\langle a\rangle\langle b\rangle\subseteq P$. אפשר לקחת $A=\langle a\rangle$ ו-$B=\langle b\rangle$ בהגדרת הראשוניות, ולקבל $\langle a\rangle\subseteq P$ או $\langle b\rangle\subseteq P$, ובפרט $a\in P$ או $b\in P$.

- $\boxed{\text{ב} \Leftarrow \text{א}}$ יהיו $A,B\lhd R$ כך ש-$AB\subseteq P$. נניח בשלילה ש-$A,B\nsubseteq P$; לכן קיימים $a\in A$ ו-$b\in B$ כך ש-$a,b\notin P$. אבל אז $\langle a\rangle\langle b\rangle\subseteq AB\subseteq P$, וכן $\langle a\rangle,\langle b\rangle\nsubseteq P$, בסתירה.

- $\boxed{\text{א} \Leftarrow \text{ג}}$ יהיו $A,B\leq_l R$ אידאלים שמאליים. נתבונן באידאלים הנוצרים על ידם $I=AR$ ו-$J=BR$. כעת, $IJ=(AR)(BR)=A(RB)R=ABR\subseteq PR=P$. כיוון ש-$I,J$ הם אידאלים דו-צדדיים, נקבל $A\subseteq I\subseteq P$ או $B\subseteq J\subseteq P$, כנדרש.

- $\boxed{\text{א} \Leftarrow \text{ד}}$ בדומה לאידאלים שמאליים.

שאלה 5. יהי R תחום שלמות.

א. הוכיחו כי $R\times\{0\}\lhd R\times R$ הוא אידאל ראשוני.

ב. לכל $n\in\mathbb{N}$ מצאו חוג שיש לו בדיוק n אידאלים ראשוניים נאותים. רמז: הסעיף הקודם עם תחום שלמות מיוחד.

פתרון.

א. ניעזר במשפט האיזומורפיזם הראשון להוכיח כי $R\times R/R\times\{0\}\cong R$. אכן, נגדיר את ההעתקה $\varphi(x,y)=y$. φ אפימורפיזם ו-$\ker\varphi=R\times\{0\}$, והאיזומורפיזם נובע ממשפט האיזומורפיזם הראשון. כיוון ש-R תחום שלמות, $R\times\{0\}$ הוא אידאל ראשוני ב-$R\times R$.

ב. יהי F שדה, וניקח את החוג $R=F\times\cdots\times F$. האידאלים הראשוניים היחידים של R הם $F\times\cdots\times F\times\{0\}\times F\times\cdots\times F$, כלומר F בכל המקומות למעט אחד שבו נשים את אידאל האפס.

שאלה 6. יהי $f\colon R\to S$ הומומורפיזם של חוגים חילופיים, ויהי $I\lhd S$ אידאל ראשוני. הוכיחו כי $f^{-1}(I)\lhd R$ הוא אידאל ראשוני.
הסיקו את המקרה הפרטי שבו R הוא תת־חוג של S ו-f היא השיכון הטבעי: אם $I\lhd S$ אידאל ראשוני, אז $I\cap R$ הוא אידאל ראשוני של R.

הוכחה. יהיו $a, b \in R$ כך ש-$ab \in f^{-1}(I)$. לכן $f(a) f(b) = f(ab) \in I$. מהראשוניות של I, $f(a) \in I$ או $f(b) \in I$, ולכן $a \in f^{-1}(I)$ או $b \in f^{-1}(I)$ כנדרש. $\square$

שאלה 7. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שחיתוך שני אידאלים מקסימליים שונים של R אינו אידאל ראשוני.

הוכחה. יהיו M_1, M_2 אידאלים מקסימליים שונים של R, ונתבונן בחיתוכם $M_1 \cap M_2$. כיוון ש-M_1, M_2 מקסימליים ושונים, $M_1 \nsubseteq M_2$ וגם $M_2 \nsubseteq M_1$, כלומר קיימים $a_1 \in M_1 \setminus M_2$ ו-$a_2 \in M_2 \setminus M_1$. נשים לב כי $a_1 a_2 \in M_1 M_2 \subseteq M_1 \cap M_2$, אבל $a_1, a_2 \notin M_1 \cap M_2$, מה שמראה שהאידאל $M_1 \cap M_2$ אינו ראשוני. $\square$

שאלה 8. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שכל אידאל ראשוני מכיל את כל האיברים הנילפוטנטיים. הסיקו מכך שהקבוצה של כל האיברים הנילפוטנטיים מוכלת בחיתוך של כל האידאלים הראשוניים. (למעשה יש שיוויון!)

הוכחה. יהי P אידאל ראשוני של R, ויהי $a \in R$ נילפוטנטי. לכן קיים $n \in \mathbb{N}$ שעבורו $a^n = 0$. אבל $a \cdot a^{n-1} = 0 \in P$, לכן $a \in P$ או $a^{n-1} \in P$. אם $a \in P$ סיימנו, לכן נניח $a^{n-1} \in P$. אבל אז $a \cdot a^{n-2} \in P$, מה שמראה ש-$a \in P$ או $a^{n-2} \in P$. אפשר כך להמשיך ולקבל $a \in P$, כנדרש. $\square$

בהצלחה!