## משפט 1:

תהי , נניח כי קומפקט ו רציפה ב-, אז רציפה במ"ש.

### הוכחה

נניח ש לא רציפה במ"ש.

וגם

לפי למה B-W

 רציפה ולכן

אבל בסתירה.

## משפט 2 :יחס בין דיפרנציאביליות וקיום של נגזרות חלקיות. נוסחא לדיפרנציאל עבור נגזרות חלקיות + דוגמא

## טענה 1

נניח ש דפ' בנקודה , אזי לכל קיימת

### הוכחה

מכיוון ש *והדיפרנציאל הוא אופרטור ליניארי, מקבלים ש:*

*נשים לב כי הגורם האחרון שואף ל0 כאשר t שואף ל0 ולכן:*

*כאשר אגף שמאל זה בידיוק ואגף ימין בידיוק וקיבלנו את הרצוי.*

## טענה 2

תהי כך ש ותהי כך ש f דיפ' בנק' a, אזי מתקיים:

### הוכחה

לכן:

מטריצה של האופרטור

## דוגמה בה כל הנגזרות החלקיות קיימות אבל הפונקציה לא דיפרנציאלית.

 לכל אבל f לא דיפרנציאלית ב (0,0).

הפונקציה אפילו לא רציפה ב-0 (ניקח מסלולים y=kx ונקבל גבולות שונים)

אך הנגזרות החלקיות קיימות כי מתקיים:

ובאופן דומה גם לנגזרות של y.

## משפט 3: הגדרה של דיפרנציאל מסדר r לנוסחה עם נגזרות חלקיות:

הגדרה:

 תהי כך שU קבוצה פתוחה ומוכלת ב .

יהי . נגדיר : , – פתוחה, קיים כך ש

אז מתקיים ש  *גזירה r פעמים ב-0. לכן ניתן להגדיר:*

## משפט

אזי

עבור

 פולינום הומוגני מסדר .

## הוכחה

כלומר כאן כלומר

נניח ש:

אם הדבר נכון לכל , נחליף ל

נגדיר

נסמן

ולכן לפי אינדוקציה כדרוש.

## משפט 4: תנאי מספיק לדיפרנציאביליות לפי רציפות נגזרות חלקיות

 נניח כי:

1. קיימות לכל בסביבה .
2. רציפות ב.

אזי דיפ' בנקודה .

### הוכחה

ניקח .

לפי משפט למשתנה אחד :

עבור

הנגזרות החלקיות רציפות ולכן

לכן קיבלנו

ולכן דיפ' בנקודה .

### עבור

לפי משפט לגראנז' כאשר

## משפט 5: תנאי מספיק לקיצון מקומי על סמך הדיפרנציאל השני

תהי פונ'

תהי נקודה קריטית, כלומר

1. אם אז נקודת מינימום מקומי ממש.
2. אם אז נקודת מקסימום מקומי ממש.
3. אם לא מוגדרת סימן אז לא נקודת קיצון.

### הוכחה

לפי המשפט הקודם קיים כך ש

נוסחת טיילור מסדר 2 סביב נקודה ::

לכל בתחום מתקיים:

ולכן נק' מינימום ממש.

1. נחליף ל.
2. נניח כי לא שומרת סימן.

אז אם אזי

1.

ולכן לא נקודת קיצון.

## משפט 6 : משפט פונקציה סתומה – משוואה אחת

תהי . נתונה

נתונה הנקודה כך ש

נניח

אזי קיימות סביבות ב כך ש

נסמן ו

### הוכחה

 – רציפה ב ולכן

סביבות כך ש

בפרט כלומר ממש (לפי ).

 רציפה ולכן

 רציפה ולכן

נגדיר

נקבע

לפי הבניה

 – רציפה לפי אם קבוע.

 ולכן לפי משפט קושי על ערך בינוני

אבל ולכן הוא יחיד.

1. צ"ל רציפה בנקודה , כלומר צ"ל:

קח ולפי הבנייה

ולכן רציפה.

נכתוב נוסחת טיילור ל בנקודה עם סדר 0 עם שארית .

עבור

ולכן

 לכן אפשר להחליף ל

ולכן

 רציפות ולכן רציפה ב

ולכן רציפות ולכן

נניח כי

ולכן

ולכן לפי אינדוקציה .

## משפט 7: משפט על פונקציה סתומה כללית

תהי

תהי
1) תהי כך ש2) נניח כי

אזי קיימות סביבות כך ש הפונקציה

### הוכחה של המשפט

אינדוקציה לגבי

 הוכחנו, נניח כי המשפט נכון עבור

WLOG :

מערכת:

לפי הנחה של אינדוקציה

 כך ש:

נתבונן במשוואה

 משוואה!

1)

2)

ניח כי

בצורה וקטורית, לפי (\*),(\*\*):

 לפי משפט למקרה

בסביבה

משפט 8 : תנאי הכרחי לקיצון על תנאי(עם אילוצים כופלי לגראנג')
יהי .
 משטח.
אם נקודת קיצון מקומי עם תנאי אז קיימים מספרים כך ש:
 אזי נקראים כופלי לגראנג'.
ז"א: .

הוכחה:

 , רגולרית ב-a.

 ולכן ניתן להניח שקיים מינור בגודל m x m כך ש: .

לפי משפט על פונק' סתומה:

 ,  *, .*

*מכאן : .*

*נגדיר: .*

*נניח כי a נקודת קיצון (בה"כ), ולכן : .*

 *. בנוסף a' נקודת מינימום ל-g בלי תנאי.*

 *, , ולכן a' נקודה קריטית לg, כלומר j=1,…,k: (a')=0.*

*נגזור את g לפי :*

.

*. 1<j<k ומכאן נקבל : .*

*כעת נוסיף את האילוצים:*

נגזור עכשיו לפי :

מכאן:

 ולכן (השלמה אורתוגונאלית)

ולכן:  *מש"ל.*

משפט 9 : קריטריון של אינטגרביליות בקטע n ממדי על סמך סכומים עליונים ותחתונים.

 כך ש: . אזי (אינטגרבילית לפי רימן) אם ורק אם :

 כלומר לכל קיימת חלוקה כך שההפרש בין הסכומים העליונים לתחתונים קטן .

הוכחה:

יהי אזי קיימת חלוקה P כך ש. כלומר ומכאן ש:

 אז  *ולכן*

*לכל . לכן* . ואז .

נניח אז .

יהי *. אז , .*

*לכן קיימות חלוקות P,Q כך ש: .*

*נגדיר : . מכאן*

*לכן : .*