

תרגיל 1

1. לכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ו $a, b \in \mathbb{R}$ מגדירים $aE + b := \{ax + b : x \in E\}$ (ז"א ש $aE + b$ היא תמונת E תחת הפונקציה הלינארית $x \mapsto ax + b$). הוכיחו: $m^*(aE + b) = |a| m^*(E)$.

2. סדרה של קבוצות $\{F_n\}$ ב $\mathbb{R}$ תקרא יורדת אם $F_{n+1} \subseteq F_n$.
א. הוכיחו כי אם $\{F_n\}$ סדרה יורדת של קבוצות סגורות ב $\mathbb{R}$ ו F_1 חסומה אזי

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

ב. האם הדבר נכון גם כאשר F_1 לא חסומה?

3. הגדרה: נאמר שקבוצה $G \subseteq \mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G \in G_\delta$ המקיימת $E \subseteq G$ וכן $m^*(G) = m^*(E)$.
הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

א. הוכיחו שלכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה פתוחה O , המקיימת $E \subseteq O$ וכן

$$m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$$

ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.