תרגיל 12 - לינארית 1 - וקטורי קואורדינטות ודטרמיננטה

01.01.2019

שאלה 1. נתון הבסיס הבא ב-$\mathbb{R}^3$:

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. ויהיו:

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ וקטורים ב $\mathbb{R}^3$.

מצאו את $[v_1]_B, [v_2]_B, [v_3]_B$.

שאלה 2. יהי B בסיס למרחב וקטורי V ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$. ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $v, w \in V$.
הוכיחו כי:

1. $v = 0 \iff [v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $[v]_B = [w]_B \iff v = w$
3. לכל $a \in \mathbb{F}^n$ קיים $v \in V$ כך ש $[v]_B = a$
4. $[\alpha v + \beta w]_B = \alpha [v]_B + \beta [w]_B$

שאלה 3. יהי $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ בסיס למרחב וקטורי V ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $u_1, \cdots u_m \in V$.

הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1, \cdots, u_m\}$ בת"ל (כוקטורים ב-V) אם ורק אם $\{[u_1]_B, \cdots [u_m]_B\}$ בת"ל (כוקטורים ב-$\mathbb{F}^n$).

הערה: ניתן להשתמש בטענה הבאה ללא הוכחה:
לכל $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in \mathbb{F}$ מתקיים כי

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\right]_B = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i [u_i]_B$$

שאלה 4. מצאו את כל התמורות ב-S_4. כתבו כל תמורה בשתי ההצגות שלמדנו.

שאלה 5. יהיו $\sigma = (1\ 2\ 6\ 4), \tau = (5\ 6\ 1\ 3)$ תמורות ב-S_6.

1. חשבו במפורש את $\sigma \circ \tau$ בשתי ההצגות.

2. מצאו את הסימן של $\sigma \circ \tau$.

שאלה 6. נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

חשבו את $\det(A), \det(B)$ לפי תמורות.