פתרון תרגיל בית 3 - טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

יהי (X,d) מ"מ.

א. הוכיחו כי לכל $x \in X$, $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X.

ב. הסיקו כי כל תת קבוצה סופית של X סגורה.

<u>פתרון</u>

א. נוכיח שלכל $x \in X$, $\{x\}$ היא קבוצה סגורה בשתי דרכים:

<u>דרך סדרות</u>- קבוצה סגורה במ"מ אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. ברור שהסדרה היחידה שמוכלת ב-$\{x\}$ היא הסדרה הקבועה שגבולה הוא, כמובן, $x \in \{x\}$.

<u>דרך נוספת</u> - נראה ש-$X\setminus\{x\}$ פתוחה. תהי $y \in X\setminus\{x\}$. יהי $\varepsilon = d(x,y)$. ברור ש- $\varepsilon > 0$ כי $x \neq y$. נראה שמתקיים $B(y,\varepsilon) \subseteq X\setminus\{x\}$. אם $z \in B(y,\varepsilon)$ אזי $\varepsilon > d(z,y)$. לכן, $z \neq x$ (כי $\varepsilon = d(x,y)$). מכאן $z \in X\setminus\{x\}$ וקיבלנו הדרוש.

ב. נניח ש-A תת קבוצה סופית של X. אם $A=\varnothing$ ברור ש- A סגורה. אחרת, תהי $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ ($n \geq 1$). מתקיים $A=\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$. עפ"י סעיף א' לכל $1 \leq i \leq n$ $\{x_i\}$ סגורה. מכיון שאיחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה נקבל ש-A סגורה.

<u>שאלה 2</u>

א. הוכיחו ש- $\mathbb{Q}$ אינה סגורה ואינה פתוחה ב- $\mathbb{R}$.

ב. הוכיחו שהקבוצה $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sin(x)+xy \leq 5\}$ סגורה ב- $\mathbb{R}^2$.

ג. הוכיחו: כל מישור ב- $\mathbb{R}^3$ הוא סגור.

ד. יהי $M_n(\mathbb{R})$ המרחב המטרי של המטריצות הריבועיות $n\times n$ עם מקדמים ממשיים (זהו המרחב המטרי $\mathbb{R}^{n\times n}$ עם המטריקה האוקלידית). הוכיחו שקבוצת המטריצות ההפיכות $GL_n(\mathbb{R})$ פתוחה במרחב זה.

<u>פתרון</u>

א. אינה פתוחה: כי כל כדור פתוח עם מרכז רציונאלי, מכיל גם נקודות אי רציונאליות.
אינה סגורה: קיימת סדרה בעלת איברים רציונאליים המתכנסת לאיבר שאינו רציונאלי (למשל: הפיתוח העשרוני של $\sqrt{2}$).

ב. הפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי $f(x,y)=\sin(x)+xy$ היא רציפה (מדוע?). בנוסף $A=f^{-1}(-\infty,5]$ ולכן A סגורה.

ג. כל מישור הוא מהצורה $Ax+By+Cz+D=0$. נתבונן בפונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x,y,z)=Ax+By+Cz+D$. מתקיים $f^{-1}(\{0\})=\{(x,y,z)\,|\,Ax+By+Cz+D=0\}$ מכיוון ש $\{0\}$ סגור ב- $\mathbb{R}$ ו- f רציפה הרי ש- $f^{-1}(\{0\})$ (שהוא המישור) סגור ב-$\mathbb{R}^3$.

ד. פונקצית הדטרמיננטה $\det:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ רציפה כפולינום ומתקיים $\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})=GL_n(\mathbb{R})$ מכיוון ש $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ נקבל הדרוש.

<u>שאלה 3</u>

א. הוכיחו/הפריכו: מטריקות שקולות מגדירות את אותה משפחה של קבוצות סגורות.

ב. אילו מהמטריקות הבאות שקולות מעל $\mathbb{R}$: d_Δ (המטריקה הדיסקרטית), d_7 (המטריקה ה-7 אדית), d_5 (המטריקה ה-5 אדית) והמטריקה הסטנדרטית d המוגדרת ע"י $d(x,y)=|x-y|$ (הוכיחו את תשובתכם!).

ג. נגדיר שתי מטריקות על $\mathbb{R}^2$. עבור $x=(x_1,y_1),\ y=(x_2,y_2)$,$d_1(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$,

$d_2(x,y)=\begin{cases}|y_1-y_2| & x_1=x_2\\ |y_1|+|y_2|+|x_1-x_2| & x_1\neq x_2\end{cases}$. הוכיחו או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולות.

ד. תהי $S=\left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n\in\mathbb{R}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\right\}$. נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות:

$d\left((a_n),(b_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n-b_n\right|$, $\rho\left((a_n),(b_n)\right)=\sup\left\{\left|a_n-b_n\right| : n\in\mathbb{N}\right\}$. הוכיחו

או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולת.

__פתרון__

א. הוכחה: מטריקות שקולות מגדירות את אותה משפחה של קבוצות פתוחות ולכן אם נעבור למשלים, ניתן לראות שהן מגדירות אותה משפחה של קבוצות סגורות.

ב. מתקיים $\left\{7^n\right\}\xrightarrow{d_7}0$ אבל $\left\{7^n\right\}\overset{d_5}{\not\to}0$ שכן $d_5(7^n,0)=1\underset{n\to\infty}{\not\to}0$. מכאן ש d_5 ו- d_7 אינן שקולות.

במטריקה הדיסקרטית הסדרות היחידות שמתכנסות הן הקבועות לבסוף.

במטריקות d_7,d_5 אין זה המצב, לכן שתי מטריקות אלה אינן שקולות לדסקרטית.

נוכיח שהמטריקה הסטנדרטית שקולה לדיסקרטית מעל $\mathbb{N}$ (ולכן אינה שקולה ל- d_5,d_7). מ"ל שכל סדרה המתכנסת במ"מ $\left(\mathbb{N},|\ |\right)$ קבועה לבסוף. נניח ש $x_n\to x$ אזי ניקח $\varepsilon=1$ ומתקיים שקיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ $d\left(x_n,x\right)<1$.

מכאן בהכרח (המרחק המינימלי בין נקודות שונות של $\mathbb{N}$ הוא 1), לכל $n\geq n_0$ $x_n=x$ והוכחנו הדרוש.

ג. שתי המטריקות אינן שקולות. הסדרה $\left(\frac{1}{n},1\right)$ מתכנסת ל- $(0,1)$ לפי d_1, אך לא מתכנסת ל- $(0,1)$ לפי d_2.

ד. שתי המטריקות אינן שקולות. נמצא סדרה שמתכנסת לאפס באחת מהן, ואינה מתכנסת בשניה.

נתבונן בסדרה הבאה:

$$a_1=(1,0,0,0,\ldots)$$
$$a_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\ldots\right)$$
$$a_3=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,\ldots\right)$$
$$\vdots$$
$$a_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n},0,0,\ldots\right)$$
$$\vdots$$

נסמן $b=(0,0,0,\ldots)$. מתקיים:

$\rho\left((a_n),b\right)=\frac{1}{n}\to 0$ וגם $d\left((a_n),b\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1\not\to 0$; וזה מוכיח הדרוש.

<u>שאלה 4</u>

א. יהיו d_1,d_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל X. יהיו ρ_1,ρ_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל Y.
נניח ש- $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ רציפה.

ב. יהיו d_1,d_2 מטריקות <u>כלשהן</u> מעל X. יהיו ρ_1,ρ_2 מטריקות <u>כלשהן</u> מעל Y. נניח ש- $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ רציפה.

<u>פתרון</u>

א. תהי U פתוחה ב-(Y,ρ_2). מכיון ש-ρ_1,ρ_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל Y נקבל U פתוחה ב-(Y,ρ_1). הפונקציה $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ רציפה וכן U פתוחה ב-(Y,ρ_1) ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-(X,d_1). d_1,d_2 מטריקות <u>שקולות</u> מעל X ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה גם ב-(X,d_2). קיבלנו שלכל U פתוחה ב-(Y,ρ_2) $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-(X,d_2) ומכאן $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ רציפה.

ב. הפרכה ע"י דוגמה נגדית: ניקח $X=Y=\mathbb{R}$, d_1 מטריקה דיסקרטית,
$d_2=\rho_1=\rho_2$ מטריקה סטנדרטית ב-$\mathbb{R}$ (מטריקה המושרית מערך מוחלט).
נקבל שכל פונקציה $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ היא רציפה מכיון שכל תת קבוצה

ב-(X,d_1) היא פתוחה (מדוע?) אבל ניתן למצוא f כך ש-

$f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ אינה רציפה, למשל, $f(x)=\begin{cases} x & x\neq 0 \\ 5 & x=0 \end{cases}$.

<u>שאלה 5</u>

תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים.

א. הוכיחו: f רציפה אמ"מ $f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X לכל <u>כדור פתוח</u> $O\subseteq Y$.

ב. הראו שהטענה האנלוגית עבור כדורים סגורים אינה נכונה. כלומר, מצאו שני מרחבים מטריים ופונקציה בינהם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$, כך ש- f אינה רציפה למרות שכן מתקיים התנאי הבא: $f^{-1}(B)$ סגורה ב- X לכל <u>כדור סגור</u> $B\subseteq Y$.

<u>פתרון</u>

א. $\Leftarrow$: אם f רציפה אז $f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X לכל <u>פתוחה</u> $O\subseteq Y$. מכיון שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה נקבל ש-$f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X לכל <u>כדור פתוח</u> $O\subseteq Y$.

$\Rightarrow$: על מנת להוכיח ש- f רציפה נראה ש-$f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X לכל <u>פתוחה</u> $U\subseteq Y$. תהי U פתוחה ב-Y. אזי לכל $x\in U$ קיים כדור פתוח $x\in B(x,\varepsilon_x)\subseteq U$. מכאן $U=\bigcup_{x\in U}B(x,\varepsilon_x)$. מתקיים

$$f^{-1}(U)=f^{-1}\left(\bigcup_{x\in U}B(x,\varepsilon_x)\right)=\bigcup_{x\in U}f^{-1}\left(B(x,\varepsilon_x)\right).$$

מכיון ש$f^{-1}\left(B(x,\varepsilon_x)\right)$ פתוחה לכל x עפ"י הנתון וכן איחוד של פתוחות הוא קבוצה פתוחה נקבל ש-$f^{-1}(U)=\bigcup_{x\in U}f^{-1}\left(B(x,\varepsilon_x)\right)$ פתוחה ב- X כדרוש.

ב. יהי $X=Y=\mathbb{R}$, d המטריקה הסטנדרטית ו- ρ המטריקה הדיסקרטית.

תהי $f=Id$ פונקציית הזהות. הפונקציה אינה רציפה שכן $\{5\}$ למשל פתוחה ב (Y,ρ) (כל הקבוצות פתוחות במ"מ דיסקרטי) אבל $f^{-1}(\{5\})=\{5\}$ לא פתוחה

ב (X,d). מצד שני במטריקה הדיסקרטית כל כדור סגור עם רדיוס $1\le$ הוא המרחב כולו וכדור סגור עם רדיוס $1>$ הוא נקודון (בדקו!) . מכיון ש- $f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ סגורה ב (X,d) וכן לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $f^{-1}(\{a\})=\{a\}$ סגורה ב (X,d) (ראו שאלה 1 א') נקבל הדרוש.

<u>שאלה 6</u>

נתבונן במרחב $C[0,1]$: מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ עם מטריקת המקסימום.

א. תהי $a\in[0,1]$. נגדיר פונקציה $F_a:C[0,1]\to\mathbb{R}$ על-ידי $F_a(f)=f(a)$. הוכיחו כי זו פונקציה רציפה.

ב. הוכיחו/הפריכו: הקבוצה $\left\{f\in C[0,1]: f\left(\frac{1}{3}\right)<19\right\}$ היא קבוצה פתוחה ב- $C[0,1]$.

<u>פתרון</u>

א. נניח שסדרת הפונקציות $\{f_n\}\subseteq C[0,1]$ מקיימת $f_n\xrightarrow{d_{\max}}f$ עבור $f\in C[0,1]$ ונראה ש- $F_a(f_n)\to F_a(f)$ ומכאן נסיק ש- F_a רציפה. על מנת להוכיח ש- $F_a(f_n)\to F_a(f)$ שקול להוכיח $f_n(a)\to f(a)$. נשים לב שמתקיים $0\le|f_n(a)-f(a)|\le\max\{f_n(x)-f(x):x\in[0,1]\}=d_{\max}(f_n,f)$. מהתכנסות $f_n\xrightarrow{d_{\max}}f$ וממשפט הסנדביץ' נקבל מיידית ש-$f_n(a)\to f(a)$ כדרוש.

ב. מתקיים $\left\{f\in C[0,1]: f\left(\frac{1}{3}\right)<19\right\}=\left\{f\in C[0,1]: F_{\frac{1}{3}}(f)<19\right\}=F_{\frac{1}{3}}^{-1}[(-\infty,19)]$.

מרציפות $F_{\frac{1}{3}}$ (עפ"י סעיף א') ומהעובדה ש-$(-\infty,19)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ נקבל ש- $\left\{f\in C[0,1]: f\left(\frac{1}{3}\right)<19\right\}=F_{\frac{1}{3}}^{-1}[(-\infty,19)]$ פתוחה ב-$C[0,1]$.