שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל בית מספר 4

תאריך הגשה: 9.05.2012

שאלה 1

הוכח או הפרך שהאוסף הבא מגדיר טופולוגיה:

א. $X=[0,\infty) \quad \tau=\{\varnothing, X, (a,\infty): \quad a\geq 0\}$

ב. $X=\mathbb{N} \quad \tau=\{\varnothing, X, A:$ תת קבוצה אינסופית ב- $\mathbb{N} \quad A\}$

שאלה 2

תזכורת:

תהי X קבוצה, נגדיר $\tau_{co-\aleph_0}=\left\{O\subseteq X: \left|O^C\right|\leq\aleph_0 \ \vee \ O=\varnothing\right\}$.

א. הוכיחו ש- $\left(X,\tau_{co-\aleph_0}\right)$ הוא מרחב טופולוגי.

ב. נניח ש- $|X|\leq\aleph_0$. הוכיחו כי $\tau_{co-\aleph_0}=\tau_{disc}$

ג. האם בתנאי סעיף ב' $\left(X,\tau_{co-\aleph_0}\right)$ מטריזבילי?

שאלה 3

א. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X הכוללת את כל תתי הקבוצות האינסופיות (אך לא בהכרח רק את אלה). הראו ש (X,τ) היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

ב. יהי X מצוייד בטופולוגיה הקו-סופית. נניח שקיימות במרחב לפחות 3 קבוצות סגורות. הראו ש X סופית.

ג. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X עם התכונה הבאה: הקבוצה האינסופית היחידה שהיא פתוחה היא X עצמה. האם τ היא בהכרח הטופולוגיה הטריוויאלית? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4

נניח $\leq$ סדר חלקי (ז"א רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטיסימטרי) על קבוצה X. נגדיר את "טופולוגית סדר חלקי" $\tau_{\leq}$ מעל X עפ"י התנאי הבא:

$O\in\tau_{\leq}$ אם"ם $\forall x\in X\left(x\in O\Rightarrow \underline{x}\subseteq O\right)$ כאשר $\underline{x}:=\{y\in X \mid \quad y\leq x\}$.

הוכיחו ש- $(X,\tau_{\leq})$ הוא מ"ט וחיתוך של אינסוף קבוצות פתוחות במרחב זה גם הוא פתוח.

<u>שאלה 5</u>

א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X. הוכיחו ש- A תת מרחב מטרי שלם.

ב. יהי X מ"מ ו- $A\subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X. הראו ש- A תת קבוצה סגורה של X.

<u>שאלת בונוס</u>

בדקו האם האוספים הבאים הם טופולוגיות על $\mathbb{R}$:

א. $\mathbb{R}$, $\varnothing$, וכל הקטעים מהצורה $[-r,r]$ עבור r אי רציונאלי חיובי.

ב. $\mathbb{R}$, $\varnothing$, כל הקטעים מהצורה $[-r,r]$, וכל הקטעים מהצורה $(-r,r)$ עבור r אי רציונאלי חיובי.

בהצלחה!