פתרון תרגיל בית 11 – טופולוגיה

**שאלה 1**

יהיו  מרחבים טופולוגיים דיסקרטיים לכל . האם מרחב המכפלה  דיסקרטי?

רמז: תלוי.

**פתרון**

מקרה ראשון: באוסף  יש אינסוף אינדקסים כך שבמרחב  יש יותר מנקודה אחת. כלומר, הקבוצה  אינסופית.

במקרה זה  אינו דיסקרטי. נראה שלמעשה אף נקודון אינו פתוח. נניח בשלילה שקיים נקודון  פתוח. אם הוא פתוח, אזי ניתן לבטא אותו כאיחוד של קבוצות בסיסיות. מכיוון ש- , ניתן להסיק שקיימת  בסיסית כך ש-.

נגדיר תת-קבוצה של : . מהגדרת טופולוגיית המכפלה נקבל ש- סופית. כעת נתבונן ב-, זו קבוצה אינסופית בהכרח. בפרט, נקבל שקיים  כך ש- וכן , בסתירה לכך ש-.

מקרה שני: באוסף  יש לכל היותר מספר סופי של אינדקסים כך שבמרחב  יש יותר מנקודה אחת. במקרה זה כל נקודון ב- הוא קבוצה בסיסית (הסבר: לכל , פרט למספר סופי, ). לכן, במקרה זה  הינו דיסקרטי.

**שאלה 2**

יהי  מרחב מטרי. הוכיחו כי הפונקציה  רציפה.

**פתרון**

לפי תרגיל שהוכחנו, מרחב המכפלה  הוא מטריזבילי, לכן הטופולוגיה עליו היא הטופולוגיה המתקבלת מהמטריקה , כלומר מהמטריקה  המוגדרת ע"י . נראה שהפונקציה רציפה לפי  ואז בפרט היא רציפה מטופולוגית המכפלה. נוכיח רציפות בנקודה . צ"ל שלכל  קיים  כך שאם  אז .

יהי  ונבחר . אזי אם  מתקיים .

שימו לב: אי השוויון  נובע מאי שוויון המשולש של המטריקה  (איך?).

**שאלה 3**

יהי  מרחב טופולוגי ותהי  קבוצת אינדקסים. נסמן ב- את מרחב המכפלה . לכל  נגדיר  להיות הווקטור האינסופי שכל רכיביו הם . נסמן  עם הטופולוגיה המושרית מ-. הוכיחו כי  הומיאומורפי ל-.

**פתרון**

תהי  מוגדרת ע"י . פונקציה זו רציפה שכן מתקבלת כצמצום הטווח של הפונקציה הרציפה  (המוגדרת על-ידי ). אכן, הפונקציה האחרונה רציפה לפי קריטריון לרציפות פונקציה לתוך מרחב מכפלה, שכן היא רציפה רכיב-רכיב (בכל רכיב מדובר בפונקציית הזהות). תזכורת:  רציפה אם ורק אם  רציפה לכל . אבל לכל  מתקיים  כלומר לכל  מתקיים  ופונקציית הזהות כמובן רציפה ממ"ט לעצמו.

נקבע . קל לראות שההופכית של  היא הפונקציה  שמתקבלת מצמצום התחום של פונקציית ההטלה הרציפה . לכן נקבל ש- הוא הומיאומורפיזם מ- ל-.

**שאלה 4**

הוכיחו שמכפלת מרחבי  היא מרחב .

**פתרון**

נניח שלכל   הוא מרחב  ונוכיח ש- הוא מרחב . שקול להוכיח שכל נקודון סגור ב-.

יהי  נקודון. נראה שהמשלים שלו פתוח. מתקיים:  כאשר

.

הערה: כדי להבין טוב יותר את החישוב הנ"ל התבוננו במכפלה סופית ושכנעו את עצמכם שזוהי הצורה הכללית של המשלים של נקודון במרחב מכפלה.

כעת, מכיון שכל המרחבים הנתונים הם  אז בהכרח לכל  מתקיים ש-  פתוחה ב-. מכאן, לכל   פתוחה בסיסית במרחב המכפלה ולכן  פתוחה כאיחוד של פתוחות.

**שאלה 5**

1. יהי  מ"ט דיסקרטי עם בסיס . הוכיחו שלכל  מתקיים .
2. יהי  מ"ט עם בסיס ,  קבוצה ו-  פונקציה **על**. הוכיחו/הפריכו:

  בסיס לטופולוגיית המנה על .

1. יהי  הישר של סורגנפריי ותהי  פונקציית הערך השלם. מצאו את טופולוגיית המנה  על  ביחס ל-.

**פתרון**

1. נסמן את הטופולוגיה הדיסקרטית ב- . תהי  אזי .  בסיס ולכן קיימת  כך ש- . מכאן בהכרח .
2. נפריך את הטענה על-ידי דוגמה נגדית מהתרגול. ניקח  מ"ט דיסקרטי כש- הוא בסיס המורכב מכל הנקודונים.

תהי  הקבוצה  ו-  מוגדרת ע"י . ראינו שבמקרה זה טופולוגית המנה  על  היא הדיסקרטית. נראה ש-  ולכן על-פי הסעיף הקודם  אינו בסיס לטופולוגיית המנה על . ואכן, אחרת,  אבל אז נקבל מהגדרת  ש-  בסתירה להגדרת .

דוגמה נוספת: , נבחר , ונגדיר את  על-ידי . אזי  הוא לא בסיס ל- (בדקו!).

1.  הטופולוגיה הדיסקרטית. הוכחנו בעבר ש- פונקציית הערך השלם רציפה ולכן נקבל מיידת ש- .

**שאלה 6**

נתבונן ב- עם הטופולוגיה הסטנדרטית ובפונקצית הערך השלם . נסמן ב-  את טופולוגיית המנה על  ביחס ל-.

1. הוכיחו שמתקיים  אם  אז .
2. הסיקו כי .

**פתרון**

1.  נניח ש . מתקיים , אמנם, . כמו כן מכיון ש- טופולוגיית מנה ו-  נקבל ש  פתוחה ב- (ולכן היא סביבה של ). לכן קיים  כך ש- . בפרט, קיים  המקיים . מכאן, .

תהי  כך שאם  אז . נראה ש-  לפי הגדרת טופולגיית מנה. נחלק למקרים:

מקרה ראשון: . קל לראות ש-  פתוחה ב- ולכן .

מקרה שני:  וקיים ל- מקסימום . קל לראות ש-  פתוחה ב- ולכן .

מקרה שלישי:  ללא חסם מלעיל. מהתנאי נקבל ש- . במצב זה,  פתוחה ב-.

1. מהאפיון שהוכחנו ובייחוד מהכיוון  נקבל ש- .

**שאלה 7**

1. יהיו  מ"ט,  רציפות ומתקיים . הוכיחו כי  העתקת מנה.
2. תהי  העתקת מנה. הוכיחו כי  הומיאומורפיזם   חח"ע.

**פתרון**

1. עלינו להוכיח שני תנאים:
2.  על – נובע מכך שפונקצית הזהות היא על.
3.  פתוחה   פתוחה. כיוון  ברור מרציפותה של . נוכיח את הכיוון השני. תהי  פתוחה ב- . בשל רציפות ,  פתוחה ב- . מאידך . והוכחנו הדרוש.
4.  מיידי מהגדרת הומיאומורפיזם.

 מספיק להוכיח כי ההעתקה פתוחה (רציפות ועל נובעות מכך ש- היא העתקת מנה, חח"ע נתונה). תהי  פתוחה.  (שימו לב שהשוויון מתקיים מכיוון ש- חח"ע), מכיוון ש-  פתוחה ב-נקבל ע"פי הגדרת העתקת מנה ש-  פתוחה ב- .