

פתרון לתרגיל בית 4

אינטרפולציה וקירוב במובן ריבועיים מזעריים.

שאלה 1. (10 נקודות)

מצא את פולינום האינטרפולציה בשיטת ניוטון עבור נתונים

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	4	0	-2	0	1	0	-0.5

תשווה את הערכים של הנקודות הנתונות עם הערכים המתקבלים באותן הנקודות עבור פונקציה $y = 2^{2-x} \cos(\pi x)$. במידה והפולינום שמצאת הוא מהוה אינטרפולציה של הפונקציה הזאת (אם כן, הסבר מדוע), הערך שגיאת אינטרפולציה בקטע נתון.

פתרון :

0	4						
0.5	0	-8					
1	-2	-4	4				
1.5	0	4	8	8/3			
2	1	2	-2	-20/3	-14/3		
2.5	0	-2	-4	-4/3	8/3	44/15	
3	-0.5	-1	1	10/3	10/3	-2/15	-46/45

$$\begin{aligned}
 P(X) = & 4 - 8x + 4x(x-0.5) + \frac{8}{3}x(x-0.5)(x-1) - \frac{14}{3}x(x-0.5)(x-1)(x-1.5) + \\
 & + \frac{44}{15}x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2) - \frac{46}{45}x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)(x-2.5)
 \end{aligned}$$

$$y(0) = 4 \cos(0) = 4$$

$$y(0.5) = 2^{1.5} \cos(\pi/2) = 0$$

$$y(1) = 2 \cos(\pi) = -2$$

$$y(1.5) = 2^{0.5} \cos(3\pi/2) = 0$$

$$y(2) = \cos(2\pi) = 1$$

$$y(2.5) = 2^{-0.5} \cos(5\pi/2) = 0$$

$$y(3) = 2^{-1} \cos(3\pi) = -0.5$$

אפשר לראות כי הערכים של פונקציה $y = 2^{2-x} \cos(\pi x)$ בנקודות הנתונות מתלכדים עם הערכים של הפולינום שמצאנו, לכן הפולינום הזה הוא אינטרפולציה של פונקציה $y = 2^{2-x} \cos(\pi x)$ בקטע $[0,3]$.

שגיאת אינטרפולציה סטודנטים יעריכו או בעזרת נוסחא מקורית לשגיאה

$$|f(x) - P_N(x)| \leq \frac{M_{N+1}}{(N+1)!} \max_{x \in [x_0, x_N]} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_N)|$$

או בעזרת הערכה של הפרש מחולק בעזרת נוסחא

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} \text{ עבור } \xi \in [x_0, x_1, \dots, x_m] \text{ כלשהו מתקיים כי}$$

שאלה 2. (15 נקודות) מצא את פולינום האינטרפולציה בשיטת לגרנז' עבור נתונים

x	0	1	8	27
Y	0	1	2	3

תשווה את הערכים של הפולינום האינטרפולציה שקיבלת בנקודות $x = 0.5, 3.5, 18$ עם הערכים של פונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x}$ באותן הנקודות. במידה והפולינום שמצאת הוא מהוה אינטרפולציה של הפונקציה הזאת (אם כן, הסבר מדוע), הערך שגיאת אינטרפולציה בקטע נתון.

פתרון :

$$p(x) = \frac{1}{182} x(x-8)(x-27) - \frac{1}{532} x(x-1)(x-27) + \frac{1}{4446} x(x-1)(x-8)$$

הערכים של הפולינום והפונקציה מתלכדים בנקודות נתונות בטבלה. עבור

נקבל $x = 0.5, 3.5, 18$

$$\begin{aligned} p(0.5) &= 0.534 \\ p(3.5) &= 2.4113 \\ p(18) &= -3.0361 \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{0.5} = 0.7937$$

$$\sqrt[3]{3.5} = 1.5183$$

$$\sqrt[3]{18} = 2.6207$$

אפשר לראות שיש הבדל די משמעותי. הפולינום הזה לא מקרב טוב את הפונקציה בקטע נתון אבל הוא כן נותן את אותם הערכים בנקודות הנתונות.

הערכת שגיאה תתבצע כמו שהוסבר בשאלה קודמת.

שאלה 3. (15 נקודות) נתונות נקודות $(2, 0.5)$, $(-1, \frac{1}{3})$, $(4, -6)$ ופונקציות הבסיס

$\varphi_1 = \sin x$, $\varphi_2 = \cos x$, $\varphi_3 = \sin^2 x$. מצא פונקצית אינטרפולציה.

פתרון :

פונקצית האינטרפולציה לפי הגדרתה $f(x) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot \varphi_i(x)$, כאשר את המקדמים מקבלים

מפתרון של מערכת

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \varphi_3(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \varphi_3(x_2) \\ \varphi_1(x_3) & \varphi_2(x_3) & \varphi_3(x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin 2 & \cos 2 & \sin^2 2 \\ -\sin 1 & \cos 1 & \sin^2 1 \\ \sin 4 & \cos 4 & \sin^2 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1/3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{אצלנו}$$

מכאן

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2 & \cos 2 & \sin^2 2 \\ -\sin 1 & \cos 1 & \sin^2 1 \\ \sin 4 & \cos 4 & \sin^2 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1/3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5089 & -0.1991 & -0.4886 \\ -0.0355 & 0.7555 & -0.8827 \\ 0.6319 & 0.5992 & 0.0930 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1/3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1194 \\ 5.5305 \\ -0.0423 \end{pmatrix}$$

אזי הפונקציה היא $f(x) = 3.1194 \sin x + 5.5305 \cos x - 0.0423 \sin^2 x$.

שאלה 4. (15 נקודות) יהי $s(x)$ ספלאיין קובי טבעי העובר דרך הנקודות בטבלה

הנתונה. נניח כי

$$s(x) = \begin{cases} 2 - \frac{11}{3}x + \frac{5}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ A - \frac{56}{3}x + 15x^2 - \frac{10}{3}x^3, & 1 \leq x < 2 \\ -33 + \frac{124}{3}x + Bx^2 + Cx^3, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

מצא את A, B, C .

פתרון:

$$\begin{aligned} 1) \quad s_2(1) = s_1(1) : A - \frac{56}{3} + 15 - \frac{10}{3} &= 2 - \frac{11}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow A = 7 \\ 2) \quad s_3''(3) = 0 : s_3'(x) &= \frac{124}{3} + 2Bx + 3Cx^2, \quad s_3''(x) = 2B + 6Cx \\ &\Rightarrow 2B + 18C = 0 \Rightarrow B + 9C = 0 \\ 3) \quad s_3(2) = 3 : -33 + \frac{248}{3} + 4B + 8C &= 3 \Rightarrow 4B + 8C = 36 - \frac{248}{3} \Rightarrow B + 2C = -\frac{35}{3} \\ A = 7, B = -15, C &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

שאלה 5. (15 נקודות) מצא קירוב בערת פולינום ריבועי במובן ריבועים מיזעריים

עבור הנתונים הבאים

פתרון :

x	-3	-1	1	3
y	15	5	1	5
x ²	9	1	1	9
x ³	-27	-1	1	27
x ⁴	81	1	1	81
xy	-45	-5	1	15
x ² *y	135	5	1	45

$$P(x)=2.125-1.7x+0.875x^2 \leq \begin{bmatrix} 4 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 164 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -34 \\ 186 \end{bmatrix}$$

שאלה 6. (15 נקודות) מצא פולינום ממעלה 2 שהיא הקירוב הטוב ביותר במובן של

ריבועים מזעריים לפונקציה $f(x) = \cos x$ בקטע $[0,1]$.

פתרון :

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 1 dx & \int_0^1 x dx & \int_0^1 x^2 dx \\ \int_0^1 x dx & \int_0^1 x^2 dx & \int_0^1 x^3 dx \\ \int_0^1 x^2 dx & \int_0^1 x^3 dx & \int_0^1 x^4 dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \cos x dx \\ \int_0^1 x \cos x dx \\ \int_0^1 x^2 \cos x dx \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \cos 1 + \sin 1 - 1 \\ -\sin 1 + 2\cos 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0034 \\ -0.0365 \\ -0.431 \end{pmatrix}$$

$$y = 1.0034 - 0.0365x - 0.431x^2 \quad \Leftarrow$$