מבוא לאנליזה מתקדמת - תרגול 1

20 באוקטובר 2020

1 הקדמה

- מתרגל: אריאל ויצמן, $relweiz@gmail.com$.
- אתר הקורס: $math-wiki$.
- חובות: הכנת שיעורי בית (ללא הגשה), בוחן אמצע להגשה עם ציון (מגן), מבחן סופי.

2 שדה המרוכבים

ראיתם בהרצאה שהמספרים המרוכבים הם מהצורה:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

נגדיר פעולות במרכובים:

- חלק ממשי: עבור $z = a + bi$ מתקיים: $Re(z) = a$. לדוגמא $Re(5 - \pi i) = 5$. $Re(2i) = 0$.
- חלק מדומה: עבור $z = a + bi$ מתקיים: $Im(z) = b$. $Im(5 - \pi i) = -\pi$. $Im(5) = 0, Im(2i) = 2$.
- שיוויון בין שני מרוכבים: $z = w \iff Re(z) = Re(w) \wedge Im(z) = Im(w)$. כלומר, $2 + 3i \neq 3 + 2i$.
- חיבור: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. לדוגמא $(3 - 2i) + (2 - 3i) = (3 + 2) + (-2 - 3)i = 5 - 5i$.
- כפל: $(a + bi)(c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$. דוגמאות:
  - $5 \cdot (1 - i) = (5 + 0i)(1 - i) = 5 - 5i$

- $(2+i)(3-5i) = (6+5) + (-10+3)i = 11-7i$

תרגילים:

1. פתרו את המשוואה: $z^2+4z+5=0$.
לפי נוסחת השורשים:

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

2. מצאו שורש למספר $2i$, כלומר מצאו את $\sqrt{2i}$.
פתרון: נגדיר $z=a+bi$, ונרצה שהוא יהיה השורש, כלומר נרצה

$$z^2 = 2i$$

כלומר:

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = 2i$$

כדי שיתקיים שיוויון צריך שיוויון בחלק הממשי ובחלק המדומה:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & Re \\ 2ab = 2 & Im \end{cases}$$

נשים לב ש$b \neq 0$ (המשוואה השניה), ולכן נוכל להציב בראשונה $a = \frac{1}{b}$ ולקבל:

$$\frac{1}{b^2} - b^2 = 0$$

נכפיל ב-b^2

$$b^4 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

הערה: b לא יכול להיות i כי הוא ממשי. ונקבל $a = \pm 1$. כלומר, $z = \pm(1+i)$.

3. פתרו: $z^2 + 2z + 1 - \frac{1}{2}i = 0$.
פתרון: לפי נוסחת השרשים:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - \frac{1}{2}i)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2i}}{2} \underset{\text{Ex2}}{=} \frac{-2 \pm (1+i)}{2}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

2.1 הצמוד המרוכב

הגדרת הצמוד: עבור $z = a + bi$, הצמוד המרוכב מוגדר להיות: $\overline{z} = a - bi$.
דוגמאות:

$$\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$$

$$\overline{2i} = -2i$$

$$\overline{\pi} = \pi$$

תכונות הצמוד:

1. $\overline{(\overline{z})} = z$. לדוג: $\overline{(\overline{5 - i})} = \overline{5 + i} = 5 - i$.
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ לדוג': $\overline{5 + i + 6 - i} = \overline{5 + i} + \overline{6 - i} = 5 - i + 6 + i = 11$.
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ לדוגמא:

$$\overline{(5 + i)(6 - i)} = \overline{30 + 1 + i} = 31 - i$$

$$\overline{5 + i} \cdot \overline{6 - i} = (5 - i)(6 + i) = 30 + 1 - i = 31 - i$$

4. $z + \overline{z} = 2Re(z)$.

$$(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$$

5. $z - \overline{z} = 2Im(z) \cdot i$.

$$(2 + 3i) - (2 - 3i) = 6i$$

6. $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i + 9 = 4 + 9 \in \mathbb{R}$$

7. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$. $9 = \overline{9}$

8. $Re(z) = 0 \iff z = -\overline{z}$ (נקרא מדומה טהור). $(i2-) = -(-2i) = -\overline{2i} = 2i$

תרגילים:

1. פתרו: $z + z\overline{z} = 3\frac{3}{4} + 2i$
פתרון: נסמן $z = a + bi$ ונקבל:

$$a + bi + a^2 + b^2 = 3\frac{3}{4} + 2i$$

נשווה חלק ממשי ומדומה:

$$\begin{cases} a + a^2 + b^2 = 3\frac{3}{4} \\ b = 2 \end{cases}$$

נציב את השנייה בראשונה ונקבל:

$$a^2 + a + \frac{1}{4} = 0$$

ולכן

$$a = -\frac{1}{2}$$

כלומר, $z = -\frac{1}{2} + 2i$.

2. הוכיחו שלמשוואה $z + \overline{z} = Re(z) + 2i$ אין פתרון.
פתרון: מתכונה 4 לעיל נקבל באגף שמאל $2Re(z)$. ניתן להעביר אגף ולקבל

$$Re(z) = 2i$$

בסתירה לכך שאגף שמאל ממשי, ואגף ימין מדומה טהור.

2.2 ערך מוחלט=נורמה

נכליל את הערך המוחלט הממשי, ע"י מרחק הנקודה מהראשית, במישור. כלומר:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

תכונות הערך המוחלט:

1. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

2. $|z| \in \mathbb{R}$ (לפי 1: $a^2 + b^2 \geq 0$, ולכן השורש שלו ממשי).

3.

(א) $|z| \geq 0$

(ב) $z = 0 \iff |z| = 0$

4. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

5. $|z + w| \leq |z| + |w|$. לדוגמא: $|2 - 4| = 2 < 6 = |2| + |-4|$

6. $|\overline{z}| = |-z| = |z|$. בעצם יש אינסוף מרוכבים עם אותה נורמה - כל אלה במעגל ברדיוס r מסביב לראשית, הם עם נורמה r

תרגילים:

1. מצאו z המקיים:

(א) $|z| = 5$

(ב) $Im(z) = 2$

פתרון: נסמן $z = a + bi$. מהתנאי השני $b = 2$, ואז:

$$5 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 4}$$

$$a = \pm\sqrt{21}$$

למשל, $z = -\sqrt{21} + 2i$ מקיים את תנאי השאלה.

2.3 חילוק

המרוכבים הוא שדה, ולכן לכל $z \neq 0$ קיים הופכי. כלומר, יש z^{-1} המקיים:

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

השאלה איך למצוא את ההופכי. למשל נמצא את $(2 - 3i)^{-1}$:

$$(2 - 3i)^{-1} = \frac{1}{2 - 3i}$$

החיים יהיו יותר קלים כאשר המכנה יהיה ממשי, וכדי שזה יקרה, ניזכר ש- $z\overline{z} \in \mathbb{R}$, ולכן נרצה להכפיל את המכנה בצמוד:

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{1}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{2 + 3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

תרגיל: כתבו את $\frac{3+i}{5-i}$ בצורה קרטזית.

פתרון:

$$\frac{3+i}{5-i} = \frac{3+i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{14+8i}{26} = \frac{7}{13} + \frac{4}{13}i$$