תרגול 6

1. תרגיל: T_3 הוא תורשתי (גם T_0, T_1, T_2 תורשתיות. T_4 תורשתי רק לקבוצות סגורות).
כלומר, יהא (X,τ) מ״ט אזי כל תת מרחב A הוא גם T_3.
פתרון: נובע ישירות מהגדרת T_3, וכן מהגדרה של מהן קבוצות פתוחות וסגורות בתת מרחב.

2. תרגיל: הוכח/הפרך: תמונה רציפה של T_2 היא T_2. כלומר, אם $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ רציפה ועל, ו(X,τ) הוא T_2, האם בהכרח (Y,σ) הוא T_2?
פתרון: זוהי הפרכה: נסתכל על $X = \{a,b\}$ עם הטופולוגיה $\{X, \emptyset, \{a\}\}$. מרחב זה אינו T_2. מצאו פונקציה רציפה $f : \mathbb{R} \to X$.

3. תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי אינסופי ו Y מרחב טופולוגי עם תכונת T_2, ותהא $f : (X, \text{cof}) \to (Y,\tau)$ רציפה. הוכיחו כי f קבועה.
פתרון: השתמשו בעובדה שבמרחב קוסופי אינסופי, לכל שתי קבוצות פתוחות לא ריקות יש חיתוך לא ריק.

   (א) למשל: כל פונקציה $f : (\mathbb{R}, \text{cof}) \to \mathbb{R}$ רציפה היא קבועה.

פנים וסגור

1. הגדרה: יהי (X,τ) מ״ט ו$A \subseteq X$ תת קבוצה. הסגור של A מסומן $cl(A) = \bar{A} = \cap_{A \subseteq S} S$ הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A. הפנים של A מסומן $int(A) = \mathring{A} = \cup_{O \subseteq A} O$ הקבוצה הפתוחה המקס' שמוכלת ב A.

   (א) דוגמא: $A = [0,1)$ ב$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה האוקלידית. הפנים הוא $(0,1)$ והסגור הוא $[0,1]$

   (ב) שימו לב שקבוצה היא בגורה אמ״ם היא שווה לסגור שלה, ופתוחה אמ״ם היא שווה לפנים שלה.

   (ג) הוכח/הפרך: $\overline{\cap A_i} = \cap \bar{A}_i$.
   פתרון: הראו כי ההכלה משמאל לימין נכונה. ההכלה השניה אינה נכונה. ניתן להדגים זאת באמצעות שני קטעים פתוחים ב$\mathbb{R}$.

   (ד) הוכח/הפרך: $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$.
   פתרון: זאת הוכחה. השתמשו בעובדה (לא הוכחנו, אבל היא טריוויאלית) שאם $A \subseteq B$ אז $\bar{A} \subseteq \bar{B}$, וכן בכך שאיחוד סופי של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה.

   (ה) טענה: $A \subseteq \mathbb{R}$ בת מניה אזי $\mathring{A} = \emptyset$.
   פתרון: זה נובע מכך שקבוצות פתוחות ב$\mathbb{R}$ הן איחוד של קטעים פתוחים, ומשיקולי עוצמה.

   (ו) משפט: $p \in \bar{A}$ אמ״מ לכל סביבה פתוחה $p \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

(ז) משפט: $p \in int(A)$ אמ"ם קיימת O פתוחה $p \in O \subseteq A$.

(ח) טענה: $\bar{A}^c = \mathring{A}^c$.

פתרון: מסתמך על שני המשפטים הקודמים. (הוכחתם את זה בהרצאה)

2. הגדרה: $A \subseteq X$ נקראת צפופה ב X אם $\bar{A} = X$.

3. הערה: קבוצה היא צפופה אמ"ם החיתוך שלה עם כל קבוצה פתוחה לא ריקה הוא לא ריק.

4. תרגיל: בטופולוגיה הקוסופית על מרחב אינסופי, כל קבוצה אינסופית היא צפופה.
פתרון: חישבו מי הן הקבוצות הסגורות שיכולות להכיל את A.

5. תרגיל: (X,τ) מ"ט. $A \subseteq Y \subseteq X$ אזי $cl_Y(A) = Y \cap cl_X(A)$
הוכחה: השתמשו באפיון של קבוצה סגורה בתת מרחב.

6. תרגיל: האם $int_Y(A) = Y \cap int_X(A)$?

7. פתרון: לא. תנו דוגמא לתת מרחב ב$\mathbb{R}$, ששונה מהפנים של עצמו. שימו לב שלכל קבוצה, הפנים של הקבוצה כתת מרחב של עצמה, זה היא בעצמה. (כלומר, כשמתייחסים לקבוצה ככל המרחב)

8. תרגיל: יהיו Y בעל תכונה T_2 ויהיו $f,g : X \to Y$ רציפות ומזדהות על תת קבוצה צפופה A של X. הוכיחו כי $f = g$.
פתרון: נניח בשלילה שקיים x כך ש: $f(x) \neq g(x)$ אזי קיימות להן סביבות פתוחות זרות מפרידות V, U. מרציפות נקבל כי $f^{-1}(V), g^{-1}(U)$ פתוחות. נשים לב ש$x \in f^{-1}(V) \cap g^{-1}(U)$, ולכן $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(U)$ היא קבוצה פתוחה לא ריקה (כחיתוך של 2 קבוצות פתוחות). כעת העזרו בתכונה של קבוצה צפופה.

9. הגדרה: ספרביליות: X נקרא ספרבילי אם יש לו תת קבוצה צפופה בת מניה. דוגמאות: כל מרחב קו-סופי.

(א) הערה: הטופולוגיה הקומנייתית על קבוצה X שאינה בת מניה היא לא ספרבילית.
הסבר: תהי $A \subseteq X$ תת קבוצה בת מניה. לפי הגדרת הטופולוגיה, A סגורה. לכן $\bar{A} = A$. בפרט, A לא צפופה.

10. תרגיל: ספרביליות אינה תכונה תורשתית.
הוכחה: נקח את חצי המישור העליון עם קבוצות פתוחות שהן איחודים של כדורים פתוחים ביחד עם נקודת ההשקה עם ציר הx (במידה ויש כזאת). אז $\mathbb{Q}^2$ חיתוך עם חצי המישור העליון צפוף שם. אבל ציר הx הוא תת מרחב דיסקרטי לא בן מניה.

11. תרגיל: יהא (X,τ) מ"ט. אזי הוא T_3 אמ"מ T_1 וכן לכל $x \in U \in \tau$ קיימת V פתוחה כך ש $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$
פתרון: $(\Rightarrow)$ צ"ל שX הוא T_3: נתון שהוא T_1. נוכיח הפרדה בין נקודה לקבוצה סגורה: תהא S סגורה ו$x \in S^c$ מהנתון קיימת V פתוחה כך ש $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq S^c$ ואז $S \subseteq \bar{V}^c, \in V$ פתוחות וזרות (כי $\bar{V}^c \subseteq V^c$).
$(\Leftarrow)$ יהיו $x \in U \in \tau$ לפי תכונת T_3 ניתן להפריד את x ואת U^c. כלומר קיימות V_1, V_2 פתוחות זרות כך ש $x \in V_1, U^c \subseteq V_2$ ואז $x \in V_1 \subseteq V_2^c \subseteq U$. מכיוון ש$V_2$ פתוחה, V_2^c סגורה. ולכן מהגדרת סגור, $\bar{V_1} \subseteq V_2^c$. מכאן נקבל ש: $x \in V_1 \subseteq \bar{V_1} \subseteq V_2^c \subseteq U$.