דוגמה

f העתקה מ$\mathbb{R}^k$ ל$\mathbb{R}^k$.
df העתקה $\mathbb{R}^k$ ל$\mathbb{R}^k$ ליניארית.

$$f(x+h) - f(x) - (df)|_x h = o(\|h\|)$$

אם f ליניארית זה שווה ל

$$f(x) + f(h) - f(x) - f(h) = 0 = o(\|h\|)$$

מקבלים ש$df|_x h = f(h)$. כלומר אם f לינארית נסמן $f(h) = hA$ (A מטריצה) ואז

$$h\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_x\right) = df|_x h = f(h) = hA$$

ניתן גם לחשב ישירות:

$$f(h) = hA$$

$$f_i(h) = \sum_{j=1}^{k} x_i a_{ij}$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}$$

דוגמה

חשב את הנפח של אליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = A,\ A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

$$(u,v,w)\begin{pmatrix} a & | & 0 \\ & b & \\ 0 & | & c \end{pmatrix} = (au, bv, cw)$$

$$\frac{x}{a} = u$$

$$\frac{y}{b} = v$$

$$\frac{z}{c} = w$$

$$\bar{D}' = \left\{u, v, w \middle| u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\right\}$$

שזה כדור בעל רדיוס אחד(במערכת הצירים החדשה)

$$|J(w)| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

$$V = \iiint\limits_{\bar{D}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint\limits_{\bar{D}'} \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w =$$

$$= abc \iiint\limits_{\bar{D}'} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w = \frac{4\pi}{3} abc$$

אינטגרציה על תחום $\bar{D}$ לא חסום(ב$\mathbb{R}^k$)

עד עכשיו דיברנו על תחומים חסומים. נניח שקיבלנו תחום $\bar{D}$ סגור לא חסום.

<u>מניחים</u>: $\bar{D}_R \doteqdot \bar{D} \cap \bar{B}(0, R)$ תחום(סגור) בעל <u>תכולה</u> לכל $R > 0$, והוא חסום כי הוא מוכל בכדור $\bar{B}(0, R)$

<u>מניחים</u>: f אינטגרבילית על כל תחום כנ"ל $\bar{D}_R$(למשל: f רציפה על $\mathbb{R}^k$).

אזי $I_R = \int\limits_{\bar{D}_R} \cdots \int f \, \mathrm{d}x$ (מוגדר היטב) ($dx = dx_1...dx_k$)

אומרים שהאינטגרל $\int\limits_{\bar{D}} \cdots \int f \, \mathrm{d}x$ <u>קיים</u>(או מתכנס) אם $\lim\limits_{R \to \infty} I_r$ קיים, וגבול זה נקרא אז האינטגרל $\int\limits_{\bar{D}} \cdots \int f \, \mathrm{d}x$

$$\boxed{\int\limits_{\bar{D}} \cdots \int = \lim_{R \to \infty} \int\limits_{\bar{D}} \cdots \int f \, \mathrm{d}x}$$

דוגמה

$$\iint\limits_{\bar{D}} e^{-x^2 - y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = ?$$

$$\bar{D}=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{c}x\geq 0\\ x\geq 0\end{array}\right\}$$

(הרבעון החיובי הסגור)

$$\bar{D}_R=\bar{D}\cap\bar{B}\left(0,R\right)$$

$$I_R=\iint\limits_{\bar{D}_R}e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

נעביר לקואורדינטות פולריות: $\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\varphi\right)}=r$

$$x^2+y^2=r^2,\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$$

$$\underbrace{(r,\varphi)}_{\in[0,R]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]=\bar{D}'_R}\qquad\to(x,y)\in\overline{D}_R$$

$$I_R=\int_0^{\pi/2}\int_0^R e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^R e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r=$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\int_0^{R^2}e^{-u}\,\mathrm{d}u\qquad\left(\begin{array}{c}u=r^2\\ du=2r\,\mathrm{d}r\end{array}\right)$$

$$=\left.e^{-u}\right|_{R^2}^{0}=1-e^{-R^2}$$

$$\boxed{I_R=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)}$$

$$\lim_{R\to\infty}I_R=\frac{\pi}{4}$$

מסקנה: $\iint\limits_{\bar{D}}e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$

דרך אחרת

נסמן $\bar{K}_R=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{c}0\leq x\leq R\\ 0\leq y\leq R\end{array}\right\}$. התחום $\bar{D}_R$ נמצא בתוך הריבוע שחוסם את הרבע עיגול שחוסם אותו:

$$\bar{K}_R\subseteq\bar{D}_{R\sqrt{2}}\subseteq\bar{K}_{R\sqrt{2}}$$

לכן מתקיים

$$\boxed{\iint\limits_{\bar{K}_R} \dots \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_{\bar{D}_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_{\bar{K}_{R\sqrt{2}}} \dots \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

$$I_R = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R}\right) \leq \iint\limits_{[0,x]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) \leq \left(\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}y\right) \leq \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

$$\boxed{\exists \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

כלומר קיבלנו

$$\exists \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ומכיוון ש e^{-x^2} פונקציה זוגית נקבל

$$\exists \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

תרגיל

נתון $\underline{n} = (1,2,3)$. מצא את משוואת המישור הניצב לn.

פתרון

$u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ - נקודה כלשהי על המישור. $\underline{x} = (x,y,z)$ - נקודה כללית על המישור.
הוקטור ביניהם:

$$\underline{u} = (x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)$$

הוקטור הכללי הזה ניצב ל$\underline{n}$:

$$\boxed{\underline{n}\cdot\underline{u} = \bar{0}}$$

$$\boxed{n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0}$$

דרך אחרת

$\underline{n}$ הוא הנורמל של כל מישור הניצב לו - כלומר ניצב לכל וקטור במישור כזה, ולכן גם לכל שני וקטורים כאלה:

$$\underline{n}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ x_1-x_0 & y_1-x_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}$$

משוואת המישור העובר דרך שלושת הנקודות הנתונות $(x_i,y_i,z_i)\,,i=0,1,2$ היא

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0$$

ובצורה אלגברית:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0\\ ax_0+by_0+cz_0+d=0\\ ax_1+by_1+cz_1+d=0\\ ax_2+by_2+cz_2+d=0\end{cases}$$

כדי שיהיה פתרון לא טריוויאלי הדטרמיננטה של המקדמים צריכה להיות אפס:

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ x_0 & y_0 & z_0 & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\end{vmatrix}=0$$

ניתן להפוך את זה לדטרמיננטה הקודמת על ידי חיסור השורה הראשונה מכל שורה אחרת:

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ x_0-x & y_0-y & z_0-z & 0\\ x_1-x & y_1-y & z_1-z & 0\\ x_2-x & y_2-y & z_2-z & 0\end{vmatrix}$$

תרגיל

חשב את הנפח של

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|4-z^2\geq x^2+y^2\geq 1\right\}$$

פתרון

$x^2+y^2+z^2\leq 4$ בתוך הכדור ברדיוס 2. מצד שני, $x^2+y^2\geq 1$ ⇐מחוץ לגליל ברדיוס אחד.

נחשב הנפח בין שתי הכיפות הכדוריות מעל העיגול $x^2+y^2\leq 1$ (במישור xy)(כלומר החלק מהגליל שנגרע מהכדור) ונחסר אותו מנפח הכדור.

הנפח הוא:

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$\iint\limits_{(x^2+y^2\leq 1)}\left[\sqrt{4-x^2-y^2}-\left(-\sqrt{\cdots}\right)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$=2\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{4-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}y \overset{\substack{u=4-r^2\\ du=-2udr}}{=} \int_0^1 u^{1/2}\,\mathrm{d}u= 2\pi u^{3/2}\Big|_3^4=2\pi\left(8-3^{3/2}\right)$$

תשובה סופית:

$$\boxed{\frac{4\pi}{3}2^3-2\pi\left(8-3^{3/2}\right)}$$