תזכורת:

הגדרה: קבוצה $\in$ טרנזטיבית, וסדורה היטב ע"י $\in$ נקראת "סודר".

בסוף השיעור ראינו שלכל שני סודרים A, B מתקיים אחד מהבאים:

$$A = B \vee A \in B \vee B \in A$$

סימונים:

1. מקובל לסמן סודרים באותיות יווניות קטנות מתחילת הסדר: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ וכו'
2. לכל סודר α, למדנו ש$\alpha \cup \{\alpha\}$ היא סודר. מסמנים את הסודר הנ"ל ב$\alpha + 1$.
3. אם $\alpha \subseteq \beta$, נסמן $\alpha \leq \beta$.
4. אם $\alpha \in \beta$ נסמן $\alpha < \beta$.

הערה: היינו מצפים שאם $\leq$ מסמן $\subseteq$, אז $<$ יסמן $\subset$.

למעשה זה שקול. כלומר, עבור שני סודרים α, β. $\alpha \subset \beta \iff \alpha \in \beta$.

הסבר: מכיוון שβ סודר, הוא קבוצה שייך טרנזיטיבית, אז אם $x \in \alpha$ זה גורר ש$x \in \beta$ לכן $\alpha \subseteq \beta$. אבל אם הוא שווה לβ נקבל ש$\beta \in \beta$, ובשיעור הקודם ראינו שסודר לא שייך לעצמו. לכן $\alpha \subset \beta$.

כיוון שני: אם α סודר ו$\alpha \subset \beta$, אז הוא תת קבוצה טרנזיטיבית של β, והיה לנו משפט בשיעור הקודם שתת קבוצה טרנזיטיבית של סודר היא סודר (לא נצרך פה) ושייכת או שווה לβ. ומכיוון שנתון ש$\alpha \subset \beta$, הוא לא שווה לβ, ולכן שייך לו.

טענה: תהי A קבוצה שייך טרנזיטיבית של סודרים. אזי A סודר.

הוכחה: כזכור, קבוצה היא סודר אם היא $\in$ טרנזיטיבית וסדורה היטב ע"י שייך.

אז נתון שA $\in$ טרנזיטיבית.

צריך להוכיח שהיחס $\in$ יוצר יחס סדר על A, ושזה יחס סדר טוב.

אפשר להגדיר את היחס $\in$ על A, כלומר עבור שני סודרים להגיד האם $\alpha \in \beta$ או $\beta \in \alpha$ או שהם שווים.

צריך להוכיח שזה אכן יחס סדר.

טרנזיטיביות: $\alpha \in \beta \in \gamma$ אז בגלל שγ סודר הוא בפני עצמו קבוצה שייך-טרנזיטיבית, ולכן $\alpha \in \gamma$.

אנטירפלקסיביות: ידוע שלכל סודר, מתקיים $\alpha \notin \alpha$.

יחס סדר טוב: צריך להראות שלכל תת קבוצה של A יש איבר ראשון. הראנו בסוף השיעור הקודם שלכל קבוצה של סודרים יש איבר ראשון.

הערה: מחלקת הסודרים (האוסף של כל הסודרים. מחלקה היא אוסף של אובייקטיבים שניתן להגדיר אותו) היא לא קבוצה.

סימון: מחלקת הסודרים מסומנת: ON.

הסבר: נניח בשלילה שON היא קבוצה. אז היא קבוצה של סודרים. נראה שהיא קבוצה טרנזיטיבית של סודרים.

כלומר, צריך להראות שאם $\alpha \in \beta \in ON$, אז $\alpha \in ON$.

$\beta \in ON$ זה אומר שβ סודר. בשיעור הקודם הוכחנו שכל איבר של סודר הוא סודר. לכן α סודר, וזה אומר ש$\alpha \in ON$.

לכן ON היא סודר, ומכאן $ON \in ON$. אבל ידוע שסודר לא שייך לעצמו.

לכן ON אינה קבוצה.

הערה: ON כמחלקה סדורה היטב ע"י $\in$.

כי ראינו ש$\in$ יוצר יחס סדר על סודרים ושלכל תת קבוצה יש איבר ראשון.

הגדרה: תהי A קבוצה סדורה. רישא של A היא תת קבוצה $B \subseteq A$ שמקיימת:

$$\forall b \in B, \forall a < b \Longrightarrow a \in B$$

נגיד שB היא רישא "נאותה" של A, אם $B \neq A$.
הגדרה: לכל A סדורה ולכל $a \in A$, הרישא שנקבעת ע"י

$$seg(a) = a \downarrow = \{b \in A : b < a\}$$

למה זה רישא? כי אם $c < b \in a \downarrow$ אז מטרנזיטיביות, $c < a$ ולכן $c \in a \downarrow$.
טענה: תהי A קבוצה סדורה היטב. כל רישא נאותה היא ראשית (כלומר, הרישא שנקבעת ע"י איזשהו איבר).
הוכחה: בתרגול.
הערה: בקבוצה שסדורה ע"י $\in$, B היא רישא אמ"ם B היא קבוצה שייך טרנזיטיבית.
הסבר: B היא רישא אמ"ם לכל $a < b \in B$ מתקיים $a \in B$. היחס "$<$" הוא "$\in$". לכן זה מתקיים אמ"ם לכל $a \in b \in B$, $a \in B$. וזה ההגדרה של קבוצה שייך-טרנזיטיבית.
בשיעור הקודם הוכחנו שתת קבוצה שייך-טרנזיטיבית של סודר היא סודר, והיא שווה לקבוצה או שייכת אליה.
אז כעת ניתן לנסח את זה בשפה של רישות:
רישא של סודר היא סודר. ואם היא רישא נאותה, היא איבר בקבוצה/סודר.
הערה: אם α וβ הם סודרים, כך ש$\alpha \in \beta$ אז α הוא רישא נאותה של β.
הסבר: כבר ראינו שאם $\alpha \in \beta$ אז $\alpha \subset \beta$, וα הוא תת קבוצה שייך טרנזיטיבית ולכן רישא.
משפט: תהי A קבוצה סדורה היטב. וB רישא נאותה של A. אזי B לא איזומורפית סדר לA.
הוכחה: ראשית, מכיוון שA סדורה היטב, ראינו שכל רישא נאותה היא ראשית, לכן $B = a \downarrow$.
נניח בשלילה שיש איזו' סדר $f : A \to B$. ונרכיב אותו עם פונקציית ההכלה מB לA. ברור שפו' ההכלה שומרת סדר. לכן $i \circ f : A \to A$ שומרת סדר (לא איזו' סדר).

$$f(a) \in B$$

ולכן

$$f(a) < a$$

אבל הוכחנו שכל פונקציה שומרת סדר מקבוצה סדורה היטב לעצמה היא פונקציה, כלומר, לכל $a \in A$, $f(a) \geq a$. סתירה.
מסקנה: אם שני סודרים איזומורפיים סדר אחד לשני, כלומר, $\alpha \cong \beta$ אז הם שווים.
הוכחה: ידוע שלכל שני סודרים α, β או שהם שווים או שאחד שייך לשני. אם בה"כ $\alpha \in \beta$, אז ראינו שזה אומר שα הוא רישא נאותה של β. ורישא נאותה של קבוצה סדורה היטב לא יכולה להיות איזומורפית סדר לקבוצה.
משפט: יהיו A, B קבוצות סדורות היטב. או שהן איזומורפיות סדר, או שאחת מהן איזומורפית סדר לרישא של השניה.
הוכחה: נסתכל על כל הזוגות מהצורה (a, b) כך ש$a \in A, b \in B$ ו$a \downarrow \cong b \downarrow$. נקרא לקבוצה של כל הזוגות האלו D.

יש לפחות זוג אחד כזה, כי ניתן לקחת את האיבר הראשון של A עם האיבר הראשון של B.
חד ערכיות: נוכיח שאם $(a,b_1)\in D\wedge(a,b_2)\in D$ אז $b_1=b_2$.
אם $(a,b_1)\in D\wedge(a,b_2)\in D$ אז

$$b_1\downarrow\cong a\downarrow\cong b_2\downarrow$$

אם $b_1\neq b_2$ אז בה"כ $b_1<b_2$, ואז $b_1\downarrow$ היא רישא נאותה של $b_2\downarrow$. וכבר ראינו שרישא נאותה של קבוצה סדורה היטב לא יכולה להיות איזומורפית סדר לקבוצה.
חח"ע: אם $(a_1,b)\in D\wedge(a_2,b)\in D$ אז $a_1=a_2$. בדיוק אותה הוכחה.
שומר סדר: נניח ש$a_1<a_2$ ו$(a_1,b_1)\in D\wedge(a_2,b_2)\in D$ ונוכיח ש$b_1<b_2$.
הסבר:
$a_1<a_2$ ולכן $a_1\in a_2\downarrow$. יש איזו' סדר

$$\varphi:a_2\downarrow\to b_2\downarrow$$

אז

$$\varphi(a_1)\in b_2\downarrow$$

בפרט $\varphi(a_1)<b_2$.
טענת עזר:
נניח שיש $f:A\to B$ איזו סדר. ו$a\in A$. אז $a\downarrow\cong f(a)\downarrow$
הוכחת עזר:
נסתכל על $f|_{a\downarrow}$. צמצום של פונקציה חח"ע הוא חח"ע. צמצום של פונקציה שומרת סדר היא פונקציה שומרת סדר. נוכיח שהתמונה היא הרישא שנקבעת ע"י $f(a)$. אם $x\in a\downarrow$ אז $x<a$ ולכן $f(x)<f(a)$ ולכן $f(x)\in f(a)\downarrow$.
כעת, אם $y\in f(a)\downarrow$, f היא פונקציה הפיכה וההופכית גם שומרת סדר, לכן, המקור של y, $f^{-1}(y)$ קטן מהמקור של $f(a)$ שהוא a.
מש"ל טענת עזר.
בחזרה להוכחה:
קיבלנו ש

$$a_1\downarrow\cong\varphi(a_1)\downarrow$$

ולכן $(a_1,\varphi(a_1))\in D$. מחד ערכיות $b_1=\varphi(a_1)$. וראינו ש$\varphi(a_1)<b_2$. לכן $b_1<b_2$.
היחס ההפוך שומר סדר:
כלומר, אם $(a_1,b_1)\in D\wedge(a_2,b_2)\in D$ ו$b_1<b_2$, אז $a_1<a_2$.
ההוכחה זהה.
טענה: התחום של D הוא רישא של A.
הסבר: צריך להוכיח שאם עבור a_1 קיים b_1 כך ש$(a_1,b_1)\in D$ ו$a_2<a_1$ אז קיים b_2 כך ש$(a_2,b_2)\in D$.
ובכן,

$$a_1\downarrow\cong b_1\downarrow$$

ש $a_2 \in a_1 \downarrow$. אז נקח את b_2 להיות התמונה של a_2 תחת האיזו' סדר. נקבל מטענת עזר שעשינו, ש

$$a_2 \downarrow \cong b_2 \downarrow$$

ולכן $(a_2, b_2) \in D$.
טענה: הטווח של של D הוא רישא של B
הוכחה זהה.
טענה: לא ייתכן שגם התחום וגם הטווח הם רישות נאותות
הסבר: נניח בשלילה ששתיהן רישות נאותות. בגלל שA וB סדורות היטב הן ראשיות.

$$range(D) = a \downarrow$$

$$dom(D) = b \downarrow$$

אנחנו רוצים להראות ש

$$a \downarrow \cong b \downarrow$$

למעשה D בעצמו הוא איזומורפיזם סדר מהתחום שלו לטווח שלו.
כלומר, מהגדרה של D נקבל $(a,b) \in D$ אבל אז $a \in range(D) = a \downarrow$ וזאת סתירה.
כעת, נחלק למקרים:
ראשית, נשים לב שכמו שהערנו, D הוא איזומורפיזם סדר מהתחום שלו לטווח שלו.
אם $range(D) = A, dom(D) = B$ נקבל $A \cong B$.
אם $range(D) = A$ והטווח הוא רישא נאותה של B אז A איזומורפי לרישא נאותה של B.
ואם $range(D)$ הוא רישא נאותה של A, והטווח הוא כל B, אז היחס ההופכי יוצר לנו איזו סדר מB לרישא נאותה של A.

הגדרת הטבעיים

הגדרה:

$$0 = \emptyset$$

נניח שהגדרנו את n, אז

$$n + 1 = n \cup \{n\}$$

למשל:

$$1 = \{\emptyset\}$$

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

טענה: כל טבעי הוא סודר.

הוכחה: באינדוקציה. ראינו ש0 סודר. נניח שn סודר. ראינו שזה אומר ש$n+1$ הוא סודר.

הערה: כל איבר של סודר טבעי הוא סודר טבעי.

הוכחה: אנחנו כבר יודעים שכל איבר של סודר הוא סודר.

נוכיח את הטענה באינדוקציה.

עבור 0 הטענה נכונה כי אין בו איברים.

נניח שהטענה נכונה לn. ונוכיח ל$n+1$. האיברים של $n+1$ הם האיברים של n או n בעצמו. n הוא סודר טבעי, ומהנחת האינדוקציה האיברים של n הם סודרים טבעיים.

הגדרה: נסמן בω את הקבוצה של כל הסודרים הטבעיים.

טענה: ω היא סודר.

הוכחה: אנחנו יודעים שקבוצה שייך טרנזיטיבית של סודרים היא סודר.

ω היא קבוצה של סודרים, מהגדרה. צריך להראות שהיא קבוצה שייך- טרנזיטיבית של סודרים. ובכן, נניח ש$m \in n \in \omega$. מהגדרת ω זה אומר שn הוא סודר טבעי. ראינו שכל איבר של סודר טבעי הוא סודר טבעי. לכן m הוא סודר טבעי, וזה אומר ש$m \in \omega$.

הגדרה: נגיד שקבוצה היא מגודל n אם יש פונקציה חח"ע ועל ממנה לn. (זכרו שn הוא קבוצה).

נגיד שקבוצה היא סופית אם היא מגודל n עבור איזשהו סודר טבעי (כלומר, $n \in \omega$).

טענה: ω היא הקבוצה של כל הסודרים הסופיים.

הוכחה: ברור מהגדרה שכל סודר טבעי הוא סופי. ולכן כל האיברים בω הם קבוצות סופיות.

כעת, נניח שα הוא סודר לא בω וצריך להוכיח שα לא סופי.

α וω הם סודרים, והנחנו ש$\alpha \notin \omega$, לכן $\alpha = \omega$ או $\omega \in \alpha$. לכן $\omega \subseteq \alpha$.

אם α היה סופי כקבוצה אז הייתה פונקציה חח"ע ועל ממנו לאיזשהו $n \in \omega$.

אפשר להסתכל על הצמצום ולקבל פונקציה חח"ע מω לn.

יהי n הראשון שעבורו יש פונקציה חח"ע מω לn. (כי ω היא סודר, אז יש איבר ראשון).

לא ייתכן ש$n = 0$ כי אין בכלל פונקציות מקבוצה לא ריקה לקבוצה ריקה.

אם $n \neq 0$, אז $n = m + 1$ עבור איזשהו m טבעי.

$n = m \cup \{m\}$

אם לm אין מקור- סיימנו, כי אז הפונקציה מלכתכילה הולכת לm.

אם יש לm מקור הוא יחיד, כי הפונקציה היא חח"ע. נניח שx הוא המקור של m.

נגדיר פונקציה חדשה שעל האיברים שקטנים מx היא עושה אותו דבר. ולכל $x \geq y$, נשלח אותו לאיפה ש$y + 1$ נשלח.

קיבלנו פונקציה חח"ע מω לm, בסתירה למינימליות של n.

מסקנה: ω הוא הסודר הראשון שאינו סופי.

הוכחה: ראינו שסודר הוא סופי אמ"ם הוא שייך לω.

כמובן שω הוא הסודר הראשון שלא שייך לω.

הגדרה: סודר α נקרא "עוקב" אם קיים סודר β כך ש$\alpha = \beta + 1$.

אחרת, α נקרא גבולי.

דוגמאות:

כל הסודרים הטבעיים חוץ מ0 הם עוקבים. 0 הוא סודר גבולי.

ω הוא סודר גבולי. אחרת, $\omega = \alpha + 1$. זה אומר ש$\alpha \in \omega$. לכן α סודר טבעי, ואז גם $\alpha + 1$ הוא טבעי. אבל ω מוגדר להיות קבוצת הסודרים הטבעיים, אז $\alpha + 1 \in \omega$ ולכן הם לא שווים.

$\omega + 1$- סודר עוקב.

$(\omega + 1) + 1$- סודר עוקב.

טענה: אם $\alpha < \beta$ אז $\alpha + 1 \leq \beta$.

הוכחה:

כזכור, $\alpha < \beta$ אומר ש$\alpha \in \beta$, שקול $\alpha \subset \beta$.

$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

$\alpha \subseteq \beta$ו $\{\alpha\} \subseteq \beta$ כי $\alpha \in \beta$, ולכן $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$. וזה בדיוק ההגדרה של $\leq$.