

פתרון תרגיל בית 8 – ליניארית 1, 2011

תרגיל 1

הוכיחו: אם הווקטורים u_1, u_2, u_3 תלויים ליניארית, אזי גם הווקטורים $u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_1$ תלויים ליניארית.

פתרון:

נתון שהווקטורים u_1, u_2, u_3 תלויים ליניארית. לכן קיימים סקלרים a, b, c (לא כולם אפס) המקיימים:

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad (*)$$

על מנת להוכיח שהווקטורים $u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_1$ תלויים ליניארית, עלינו למצוא צירוף ליניארי לא טריוויאלי שלהם שנותן את ווקטור האפס. כלומר, אנחנו מחפשים סקלרים α, β, γ (לא כולם אפס) המקיימים: $\alpha(u_1 + u_2) + \beta(u_2 + u_3) + \gamma(u_3 + u_1) = 0$. המשוואה האחרונה שקולה ל:

$$(\alpha + \gamma)u_1 + (\alpha + \beta)u_2 + (\beta + \gamma)u_3 = 0 \quad (**)$$

נשווה את המקדמים של (*) לאלה של (**) ונקבל את מערכת המשוואות:

$$(***) \quad \begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \alpha + \beta = b \\ \beta + \gamma = c \end{cases} \quad \text{קל לראות שהפתרון הוא:}$$

$$\alpha = \frac{a+b-c}{2}, \quad \beta = \frac{c-a+b}{2}, \quad \gamma = \frac{c+a-b}{2}$$

ואכן מתקיים

$$\frac{a+b-c}{2}(u_1 + u_2) + \frac{c-a+b}{2}(u_2 + u_3) + \frac{c+a-b}{2}(u_3 + u_1) = au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$$

מצאנו את צירוף הליניארית הלא טריוויאלי הדרוש, ולכן הווקטורים הינם תלויים ליניארית.

$$\alpha = \frac{a+b-c}{2}, \quad \beta = \frac{c-a+b}{2}, \quad \gamma = \frac{c+a-b}{2} \quad \text{[שימו לב שלפחות אחד מהמקדמים}$$

שונה מאפס, וניתן לראות זאת מ- (***)]

תרגיל 2

עבור אילו ערכי λ מתקיים:

$$\{a_1, a_2\} \text{ בת"ל} \Leftrightarrow \{\lambda a_1 + a_2, a_1 + \lambda a_2\} \text{ בת"ל.}$$

פתרון:

נתון שהקבוצה $\{a_1, a_2\}$ בת"ל. נתבונן בקבוצה $\{\lambda a_1 + a_2, a_1 + \lambda a_2\}$ ונרכיב צירוף ליניארי של איבריה הנותן את ווקטור האפס:

$$\alpha(\lambda a_1 + a_2) + \beta(a_1 + \lambda a_2) = 0 \quad (*)$$

הווקטורים יהיו בת"ל אם הפתרון היחיד למשוואה זו - הוא הפתרון הטריטיואלי $\alpha = \beta = 0$

[הערת-שוליים-כללית-אך-חשובה: שימו לב, הפתרון הטריטיואלי תמיד קיים! מה שמעניין אותנו כשאנחנו בודקים תלות/אי תלות ליניארית, זאת השאלה הבאה: האם זהו הפתרון היחיד? אם כן - הווקטורים בת"ל. אחרת - הם ת"ל.]

כעת, המשוואה האחרונה (*) שקולה ל: $a_1(\lambda\alpha + \beta) + a_2(\alpha + \lambda\beta) = 0$. הווקטורים a_1, a_2 בת"ל, ולכן מתקיים: $\lambda\alpha + \beta = 0$, $\alpha + \lambda\beta = 0$.

רגע חושבים: מה בעצם אנחנו מחפשים?..

תשובה: השאלה המקורית היא: עבור אילו ערכי λ הווקטורים $\{\lambda a_1 + a_2, a_1 + \lambda a_2\}$ בת"ל? אך שימו לב, שלאחר הפיתוח שלנו, השאלה היא, למעשה, עבור אילו ערכי λ

הפתרון היחיד למערכת
$$\begin{cases} \lambda\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \lambda\beta = 0 \end{cases}$$
 הוא הפתרון הטריטיואלי (פתרון האפס)?

שאלה טובה. לשם כך יש לפתור את המערכת. נציב את המשוואה השניה בראשונה ונקבל: $\lambda^2\beta = \beta$. מה עושים? אז ככה. אם $\beta = 0$, אזי גם $\alpha = 0$ וזהו הפתרון הטריטיואלי שתמיד קיים. אבל אנחנו שואלים, מתי זהו הפתרון היחיד. אז נניח לרגע שיש פתרון לא טריטיואלי, כלומר $\beta \neq 0$. במצב זה, אפשר לצמצם ולקבל $\lambda^2 = 1$, או $\lambda = \pm 1$.

אכן, עבור $\lambda = \pm 1$ יש למערכת פתרון לא טריטיואלי $\alpha = \beta$ (אל תאמינו לנו! בדקו לבד...).

לסיכום, עבור $\lambda \neq \pm 1$ הפתרון היחיד הוא הפתרון הטריטיואלי, ולכן, הווקטורים $\{\lambda a_1 + a_2, a_1 + \lambda a_2\}$ בלתי תלויים ליניארית.

תרגיל 3

תהי $\{a_1, \dots, a_k\}$ קבוצת ווקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכיחו, אם $k > n$ אזי הקבוצה תלויה ליניארית.

פתרון:

$\{a_1, \dots, a_k\}$ קבוצת ווקטורים ב- $\mathbb{R}^n$ ולכן כל ווקטור בקבוצה הוא מאורך n . נסמן:

$$a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

$$a_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$$

נתבונן בצרוף ליניארי של ווקטורים אלה הנותן את ווקטור האפס:

$$\beta_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + \beta_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \dots + \beta_k(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) = 0$$

כלומר,

$$(\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} + \dots + \beta_k a_{k1}, \dots, \beta_1 a_{1n} + \beta_2 a_{2n} + \dots + \beta_k a_{kn}) = 0$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} + \dots + \beta_k a_{k1} = 0 \\ \vdots \\ \beta_1 a_{1n} + \beta_2 a_{2n} + \dots + \beta_k a_{kn} = 0 \end{cases}$$

אם $k > n$ קיבלנו מערכת הומוגנית שיש בה יותר משתנים ממשוואות, ולכן יש לה פתרון לא טריוויאלי. לכן – הווקטורים תלויים ליניאריים.

תרגיל 4

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

יהיו

הוכיחו ש- V הוא מרחב ווקטורי, ו- W אינו מרחב ווקטורי.

פתרון:

ידוע ש $\mathbb{R}^n$ מ"ו. לכן מ"ל ש V ת"מ של $\mathbb{R}^n$. נעשה זאת עפ"י הקריטריון המקוצר. קל לראות ש $(0, 0, \dots, 0) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$.

נניח ש $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in V$ וכן $\alpha \in \mathbb{R}$ אזי

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0 \text{ ולכן}$$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) = 0 \text{ ומכאן}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in V \text{ , לבסוף ,}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow \alpha(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 0 \Rightarrow \alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n = 0$$

מכאן $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in V$. הוכחנו עפ"י הקריטריון המקוצר ש V ת"מ.

W אינו מרחב ווקטורי כי למשל $(0, 0, \dots, 0) \notin W$. דרך אחרת: $e_1 \in W$ אבל $2e_1 \notin W$.

תרגיל 5

ידוע שאוסף כל הפונקציות $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ מהווה מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{R}$ ביחס לחיבור פונקציות $((f+g)(x) = f(x) + g(x))$ וכפל בסקלר $((\alpha f)(x) = \alpha(f(x)))$. הוכיחו/הפריכו: קבוצת כל הפונקציות $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות $f(1) = 0$ היא תת מרחב ווקטורי (של המרחב הנ"ל).

פתרון:

הטענה נכונה. יהי V אוסף כל הפונקציות $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ו W קבוצת כל הפונקציות $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות $f(1) = 0$. נוכיח ש W ת"מ של V . נשים לב תחילה שוקטור האפס הוא הפונקציה הבאה: $0_V(x) = 0 \quad \forall x$. מתקיים: $0_V(1) = 0$ ומכאן $0_V \in W \subseteq V$. אם $f, g \in W$, אז מתקיים $f(1) = g(1) = 0$ ומכאן $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$ ובסה"כ נסיק ש $f+g \in W$. לכן W ת"מ של V (עפ"י הקריטריון המקוצר).

תרגיל 6

בדקו האם W הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^3$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\}$

ב. $W = \{(a, b, c) \mid a \leq b \leq c\}$

ג. $W = \{(a, b, c) \mid a = b^2\}$

פתרון:

א. W ת"מ של $\mathbb{R}^3$. איך מוכיחים? כרגיל, בעזרת הקריטריון מקוצר. מכיון ש $0 = 3 \cdot 0$ נקבל ש $(0, 0, 0) \in W \subseteq \mathbb{R}^3$.

נניח $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$. אזי $a_1 = 3b_1, a_2 = 3b_2$. מכאן, $\alpha a_1 = 3\alpha b_1$ וכן $a_1 + a_2 = 3(b_1 + b_2)$. נוכל להסיק ש

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \in W$$
$$\alpha(a_1, b_1, c_1) = (\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha c_1) \in W$$

ב. W אינו ת"מ של $\mathbb{R}^3$. ניתן להפריך זאת למשל ע"י העובדה ש $(1, 2, 3) \in W$ אבל $-(1, 2, 3) = (-1, -2, -3) \notin W$.

ג. W אינו ת"מ של $\mathbb{R}^3$. ניתן להפריך זאת למשל ע"י העובדה ש $(1,1,0) \in W$ אבל $-(1,1,0) = (-1,-1,0) \notin W$.

תרגילים מהחוברת

עמוד 37 והלאה:

5.1, 5.4, 5.6, 5.7, 5.8 סעיפים א' ו-ד', 6.2

שאלה 5.1

- א. הווקטורים הם בלתי תלויים (בדיקה קלה!)
 ב. כאן הם כן תלויים היות ומעל $\mathbb{Z}_3$ מתקיים $(2,1,1) = (1,2,2)$ (נכפול אחד מהם ב-2).

שאלה 5.4

השאלה היא האם קיים צירוף $\alpha_1 \begin{pmatrix} 16 & 10 & 9 \\ 3 & 8 & -11 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = 0$ שאינו טריוויאלי.

ניתן לראות כי: $\begin{pmatrix} 16 & 10 & 9 \\ 3 & 8 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכן המטריצות תלויות ליניארית.

שאלה 5.6

- א. נניח שהווקטורים $v_1, \dots, v_n$ תלויים ליניארית ו- $v_1 \neq \vec{0}$. נראה שקיים $1 < i \leq n$ כך ש v_i הוא צ"ל של $v_1, \dots, v_{i-1}$. מכיון ש $v_1, \dots, v_n$ תלויים ליניארית קיים צירוף ליניארי

לא טריוויאלי $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = \vec{0}$ (כלומר לא כל המקדמים שווים אפס). יהי

$i = \max \{j : \alpha_j \neq 0\}$. ברור ש $i \leq n$. כמו כן עפ"י הגדרת i ברור כי $\sum_{j=1}^i \alpha_j v_j = \vec{0}$.

נראה ש $1 < i$. אחרת, $1 = i$ ואז $\alpha_1 v_1 = \vec{0}$ אך זה לא יתכן שכן $v_1 \neq \vec{0}$ ו-

$\alpha_1 = \alpha_i \neq 0$. לכן, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i v_i = \vec{0} \Rightarrow v_i = \frac{-\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1}$.

וקיבלנו הדרוש.

שימו לב ש $\alpha_i \neq 0$ ולכן הצירוף הליניארי הנ"ל מוגדר היטב.

ב. עפ"י הנתון נקבל שקיים $1 \leq i \leq n$ כך ש $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j v_j = v_i$ ולכן $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j v_j - v_i = \vec{0}$

וקיבלנו צירוף ליניארי לא טריוויאלי (שהרי המקדם של v_i הוא -1) ומכאן הקוטורים תלויים.

ג. $v_1, \dots, v_n, v$ תלויים ליניארית לכן קיים צירוף ליניארי לא טריוויאלי

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \alpha_{n+1} v = \vec{0} \quad (\text{כלומר לא כל המקדמים שווים אפס}). \text{ נראה שבהכרח}$$

$$\alpha_{n+1} \neq 0. \text{ אחרת, } \alpha_{n+1} = 0 \text{ ואז } \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \vec{0} \text{ ואז } \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + 0v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \vec{0}$$

$$\text{כעת, } \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \vec{0} \text{ וכן } v_1, \dots, v_n \text{ בלתי תלויים ליניארית ומכאן } \alpha_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$$

$$\text{אבל גם } \alpha_{n+1} = 0 \text{ בסתירה לכך שהצירוף הליניארי } \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \alpha_{n+1} v = \vec{0} \text{ אינו}$$

$$\text{טריוויאלי. מכאן, } \alpha_{n+1} \neq 0 \text{ ואז } \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} \right) v_i = v$$

5.7 שאלה

א. הכיוון $\Leftarrow$: אם $v_1, \dots, v_n$ תלויים ליניארית אז קיים צירוף ליניארי לא טריוויאלי

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0} \quad \text{ומכיון שנתון ש } v_1, \dots, v_n \text{ שונים ניתן לומר שקיים צירוף ליניארי לא טריוויאלי של } n \text{ איברים שונים (ולכן של מספר סופי של איברים שונים)}$$

$$\text{מתוך } S = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ שנותן } \vec{0}. \text{ מכאן, עפ"י הגדרה הקבוצה } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ ת"ל.}$$

$$\text{הכיוון } \Rightarrow \text{ תהי } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ ת"ל אז קיים צירוף ליניארי לא טריוויאלי של מספר}$$

$$\text{סופי של איברים שונים מ- } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ שנותן } \vec{0}. \text{ לכן קיימים}$$

$$v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \{v_1, \dots, v_n\} \text{ (שונים) וסקלרים } \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ שאינם כולם אפס כך ש}$$

$$\alpha_1 v_{i_1} + \dots + \alpha_k v_{i_k} = \vec{0} \quad (1 \leq k \leq n). \text{ אבל אז נקבל ש- } \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \text{ המוגדר ע"י}$$

$$\beta_j = \begin{cases} \alpha_m & j = i_m, 1 \leq m \leq k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \text{ הוא צירוף ליניארי לא טריוויאלי של } v_1, \dots, v_n \text{ שנותן } \vec{0}$$

$$\text{ומכאן } v_1, \dots, v_n \text{ ת"ל.}$$

ב. תהי $S \subseteq A$ כך ש S ת"ל, אזי עפ"י ההגדרה יש צירוף ליניארי לא טריוויאלי של

$$\text{מספר סופי של איברים שונים מ- } S \text{ שנותן } \vec{0}. \text{ האיברים הנ"ל נמצאים גם ב- } A \text{ שכן } S \subseteq A \text{ ומכאן אותו צירוף ליניארי הוא צירוף ליניארי לא טריוויאלי של מספר סופי של}$$

$$\text{איברים שונים מ- } A \text{ שנותן } \vec{0}. \text{ נקבל עפ"י הגדרה ש } A \text{ ת"ל.}$$

ג. מכיון שבכל שדה F קיים 1 וכמו כן מתקיים תמיד $\vec{0} = 1 \cdot \vec{0}$ נקבל שבהכרח כל קבוצה המכילה את וקטור האפס תלויה ליניארית.

ד. עפ"י סעיף קודם הקבוצה $\{\vec{0}\}$ היא קבוצה ת"ל בעלת איבר אחד. (אין דוגמא נוספת לקבוצה בעלת איבר אחד אשר תלויה ליניארית).

שאלה 5.8

א. הפרכה- תהיינה $A = \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,0), (0,1)\}$. מתקיים A ת"ל עם איבר אחד אבל ב B שני איברים והיא בת"ל.

ד. הוכחה- נניח $\alpha(u+v) + \beta(v+w) + \gamma(w+u) = 0$ אזי $(\alpha + \gamma)u + (\alpha + \beta)v + (\beta + \gamma)w = 0$ ומכיון שנתון ש $\{u, v, w\}$ בת"ל נסיק ש :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \gamma = \beta, \beta + \gamma = 0 \Rightarrow 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \alpha = \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

ומכאן גם $\{u+v, v+w, w+u\}$ בת"ל. הערה- את הגרירה האחרונה ניתן היה להסיק רק בשדה עם מאפיין שונה מ 2.

שאלה 6.2

נוכיח את כל השאלה בשימוש תכונות מוכרות (למרות שניתן לפתור גם ישירות).

א) עפ"י **6.1** (אותו הוכחתם בהרצאה) $\text{span}(W)$ הוא תת המרחב הקטן ביותר המכיל את W , אבל אם W בעצמו תת מרחב אז נקבל שבהכרח תת המרחב הקטן ביותר המכיל את W הוא W ומכאן $\text{span}(W) = W$.

ב) ידוע ש $U+W$ הוא תת המרחב הקטן ביותר (ראו 4.1 בספר) המכיל את U, W ולכן הוא בהכרח תת המרחב הקטן ביותר המכיל את $U \cup W$ אך עפ"י **6.1** נקבל ש $\text{span}(U \cup W)$ הוא תת המרחב הקטן ביותר המכיל את $U \cup W$ ומכאן $\text{span}(U \cup W) = U + W$.

ג) מהגדרת סכום של תתי מרחבים נקבל כי בהכרח (ראו 4.1) $\text{span}(A), \text{span}(B) \subseteq \text{span}(A) + \text{span}(B)$ מצד שני עפ"י **6.1** נקבל

$$A, B \subseteq \text{span}(A) + \text{span}(B) \Rightarrow A \cup B \subseteq \text{span}(A) + \text{span}(B) \xrightarrow{6.1} \text{span}(A \cup B) \subseteq \text{span}(A) + \text{span}(B)$$

לכן הראינו בינתיים ש $\text{span}(A \cup B) \subseteq \text{span}(A) + \text{span}(B)$. נוכיח שגם ההכלה הפוכה

מתקיימת ונסיק שמתקיים שוויון. ידוע $span(A) \subseteq span(C) \Leftarrow A \subseteq C$ (גם גרירה זו נובעת מ **6.1** $span(C)$ תת מרחב המכיל את C ומכיון ש $A \subseteq C$ אז $A \subseteq span(C)$ אבל מכיון ש $span(A)$ תת המרחב הקטן ביותר המכיל את A מקבלים $span(A) \subseteq span(C)$).

נסיק שמכיון ש $A, B \subseteq A \cup B$ אזי $span(A), span(B) \subseteq span(A \cup B)$ אבל אז בהכרח $span(A) + span(B) \subseteq span(A \cup B)$ (מ 4.1 $span(A) + span(B)$ תת המרחב הקטן ביותר שמכיל את $span(A), span(B)$. שימו לב : $span(A), span(B)$ תתי מרחבים וניתן להשתמש במשפט 4.1). הוכחנו הכלה דו כיוונית ולכן מתקיים שוויון.

(ד) עפ"י **6.1** $span(A)$ תת מרחב ולכן אם נציב $W = span(A)$ נקבל מסעיף א $span(span(A)) = span(A)$ ומכאן $span(W) = W$.