אנליזה 1 למורים- פתרון תרגיל 3

פתרון שאלה 1

לכל אחד מהסדרות הבאות מצאו את הגבול והוכיחו לפי ההגדרה שאכן הסדרה מתכנסת לאותו גבול:

א. $$a_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$$

פתרון:

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+(-1)^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 2$$

נוכיח לפי ההגדרה שזה אכן הגבול:

יהי $\varepsilon > 0$ ונרצה להראות שקיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים: $\left|\frac{2n+(-1)^n}{n}-2\right| < \varepsilon$

נשים לי כי: $\left|\frac{2n+(-1)^n}{n}-2\right| = \left|\frac{2n}{n}+\frac{(-1)^n}{n}-2\right| = \left|2+\frac{(-1)^n}{n}-2\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$

ולכן: $\left|\frac{2n+(-1)^n}{n}-2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

נבחר $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ואכן יתקיים כי לכל $n \ge n_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{2n+(-1)^n}{n}-2\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

ב. $$a_n = \frac{5n}{n^2+3n+1}$$

פתרון:

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n^2+3n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{5}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \frac{0}{1} = 0$$

נוכיח לפי ההגדרה שזה אכן הגבול:

יהי $\varepsilon > 0$ ונרצה להראות שקיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים: $\left|\frac{5n}{n^2+3n+1}-0\right| < \varepsilon$

נשים לי כי: $\left|\frac{5n}{n^2+3n+1}-0\right| = \left|\frac{5n}{n^2+3n+1}\right| < \left|\frac{5n}{n^2}\right| = \left|\frac{5}{n}\right| = \frac{5}{n}$

ולכן: $\left|\frac{5n}{n^2+3n+1}-0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{n} < \varepsilon$

נבחר $n_0 > \frac{5}{\varepsilon}$ ואכן יתקיים כי לכל $n \ge n_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{5n}{n^2+3n+1}-0\right| < \frac{5}{n} \le \frac{5}{n_0} < \varepsilon$$

ג. $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$

<u>פתרון:</u>

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

נוכיח לפי ההגדרה שזה אכן הגבול:

יהי $\varepsilon > 0$ ונרצה להראות שקיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים: $\left|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right| < \varepsilon$

נשים לי כי: $\left|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right| < \left|\frac{n^2-1}{n^2}-1\right| = \left|\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}-1\right| = \left|1-\frac{1}{n^2}-1\right| = \frac{1}{n^2}$

ולכן: $\left|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right| < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$

נבחר $n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ואכן יתקיים כי לכל $n \ge n_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right| < \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n_0^{\,2}} < \varepsilon$$

שאלה 2

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $a_n=\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{5n}$

<u>פתרון</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{5n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{5n}\right)\left(\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{5n}\right)}{\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{5n}}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{5n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(3-\frac{5}{n}\right)}{\sqrt{n^4\left(\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}+\sqrt{n^4\left(\frac{5}{n^3}\right)}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(\sqrt{\left(\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5}{n^3}\right)}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(3-\frac{5}{n}\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5}{n^3}\right)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{0}\right)=\infty$$

ב. $a_n=\sqrt{\frac{5n^3-1}{-n^2+5n^3}}$

<u>פתרון</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3-1}{-n^2+5n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3\left(5-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{-1}{n}+5\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-\frac{1}{n^3}}{\frac{-1}{n}+5}\right)=\frac{5}{5}=1$$

ג. $a_n=\frac{4^{2n}}{5^{n-1}\cdot 8^n}$

פתרון

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{2n}}{5^{n-1}\cdot 8^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n-1}\cdot 4^n\cdot 4}{5^{n-1}\cdot 8^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{4}{8}\right)^n\cdot 4\right)=0\cdot 0\cdot 4=0$$

שאלה 3

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ **וגם** $a_n > 10$ **לכל n טבעי אזי** $L > 10$

פתרון

הפרכה: הסדרה $a_n = 10+\frac{1}{n}$ מקיימת $a_n > 10$ לכל $n \in \mathrm{N}$, אבל מתכנסת לגבול $L=10$:

אכן, בהינתן $\varepsilon > 0$, ניקח $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ואז לכל $n \ge n_0$ מתקיים:

$$\left|a_n - 10\right| = \left|10+\frac{1}{n}-10\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

ב. אם $\lim_{n\to\infty}(a_n)^2 = L > 0$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{L}$

פתרון

הפרכה: הסדרה $a_n = (-1)^n$ מקיימת $a_n{}^2 = (-1)^{2n} = 1$ לכן $\lim_{n\to\infty} a_n{}^2 = 1$ אולם הסדרה a_n כלל לא מתכנסת.