משפטים שיכול להיות שנתבקש להוכיח במבחן והוכחותיהן

מאת: הלל בן חנוך

הערות על הסימון והמבנה

משפט: תוצאה מתמטית שהוכחתה במלואה.

מבחן: קריטריון או תוצאה לשימוש בהוכחות (למשל, מבחן השורש, מבחן המנה).

טענה: הצהרה או תוצאה המשמשת כהנחה או כהשלמה להוכחה עיקרית.

למה: תוצאה עזר אשר מוכיחה חלקים מההוכחות.

הדגשה:

ההוכחות המופיעות כאן נועדו לרענון הזיכרון ולהבהרת הרעיונות המרכזיים, אך הן מניחות היכרות מוקדמת עם הרקע המתמטי הנדרש. כל ההוכחות כתובות בצורה מלאה, מובנת וברורה, תוך שימת דגש על דיוק והשלמות של הטיעונים המתמטיים.

יש לציין כי כל ההוכחות הנדרשות כלולות כאן. מעבר לכך, התוכן נבדק בקפידה, אך ייתכן וייmצאו בו שגיאות קלות, אשמח אם תעדכנו אותי אם מצאתם אחת.

תוכן העניינים

1 סדרות וטענות בסיסיות 3
1.1 השוואת גבולות סדרות 3
1.2 תת-סדרה מונוטונית 4
1.3 משפט בולצנו-ויירשטרס 5
1.4 קריטריון קושי להתכנסות סדרות 5
1.5 כלל המנה 6
1.6 הגדרת e 9

2 טורים חיוביים ומבחנים לשיעורם 11
2.1 מבחן השורש לטור חיובי 11
2.2 מבחן המנה לטור חיובי 13
2.3 מבחן העיבוי לטורים חיוביים 13
2.4 משפט לייבניץ 14
2.5 משפט רימן לטורים מתחלפים 15

3 גבולות לפונקציות 19
3.1 אי-קיום גבול לפונקציה 19
3.2 משפט ערך הביניים לפונקציות 20
3.3 משפט ויירשטרס 21
3.4 משפט קנטור 23

4 נגזרות וכללי גזירה 23
4.1 גזירה מול רציפות 23
4.2 נגזרת פונקציה הופכית 24
4.3 כלל השרשרת 26
4.4 נגזרת $\arcsin x$ 27
4.5 משפט פרמה 28
4.6 משפט רול' 30
4.7 משפט הערך הממוצע לגרנז' 30

5 כלל לופיטל 31
5.1 כלל לופיטל עבור הביטוי $\frac{0}{0}$ 31
5.2 כלל לופיטל עבור הביטוי $\frac{*}{\infty}$ 34

1 סדרות וטענות בסיסיות

1.1 השוואת גבולות סדרות

הצהרה:
אם $a < b$ ו-

$$a_n \to a, \quad b_n \to b$$

אז $a_n < b_n$ לכמעט כל n. בפרט:

1. אם $a_n \to a < b$ אז $a_n < b$ לכמעט כל n.
2. אם $a_n \to a > b$ אז $a_n > b$ לכמעט כל n.

הוכחה.
נסמן $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.
מכיוון ש-$a_n \to a$ הסדרה (a_n) נמצאת, לכמעט כל n, בסביבה $(a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$ כלומר $a_n < a + \varepsilon$.
מכיוון ש-$b_n \to b$ הסדרה (b_n) נמצאת, לכמעט כל n, בסביבה $(b-\varepsilon,\, b+\varepsilon)$ כלומר $b_n > b - \varepsilon$.
לכן, לכמעט כל n:

$$a_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = b - \frac{b-a}{2} = b - \varepsilon < b_n.$$

(כלומר $a_n < b_n$ לכל n גדול מספיק.)

כעת, נוכיח את שני המקרים הפרטיים:

הוכחת (1): ידוע כי $a_n \to a < b$, ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$, מתקיים:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

$$a_n < a + \varepsilon.$$

נבחר $\varepsilon = b - a > 0$, ולכן לכל $n > N$, מתקיים:

$$a_n < a + (b - a) = b.$$

כלומר, $a_n < b$ לכל n גדול מספיק.

הוכחת (2): ידוע כי $a_n \to a > b$, ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$, מתקיים:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < a_n$$

נבחר $\varepsilon = a - b > 0$, ולכן לכל $n > N$, מתקיים:

$$a_n > a - (a - b) = b.$$

כלומר, $a_n > b$ לכל n גדול מספיק.

□

1.2 תת-סדרה מונוטונית

הצהרה:
לכל סידרה (a_n) יש תת-סידרה מונוטונית.

הוכחה.
תהי (a_n) סדרה.
נאמר ש-a_n הוא איבר שיא אם $a_n \geq a_m$ לכל $m > n$ (כלומר אם כל האיברים אחריו קטנים או שווים לו).
נחלק למקרים:

1. אם יש אינסוף איברי שיא בסדרה, נבחר תת-סידרה המורכבת מכל איברי השיא – זוהי סדרה מונוטונית יורדת.
   הוכחה:
   נסמן את k_n להיות התת סדרה של האיברי שיא, מכיוון שהיא תת סדרה היא שומרת על סדר ולכן לכל n מתקיים ש$k_n < k_{n+1}$, אבל מכיוון שהם איברי שיא מתקיים גם ש $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$ כלומר, a_{k_n} היא תת סדרה מונוטונית יורדת.

2. אם יש מספר סופי של איברי שיא, נניח שהאיבר הפסגה האחרון בסדר הוא a_n אז ניקח את האיבר a_{n+1} , הוא לא פסגה, ולכן יש איבר כולשהו שבא אחרי ושגדול ממנו, אבל גם הוא לא פסגה! ולכן גם אחריו קיים איבר שגדול ממנו וככה עד אנסוף והנה לנו סדרה מונוטונית עולה (תודה לגבע).

לכן, בכל מקרה קיימת תת-סידרה מונוטונית. □

1.3 משפט בולצנו-ויירשטרס

הצהרה:
לכל סדרה חסומה יש תת-סידרה מתכנסת.

הוכחה.
תהי (a_n) סדרה חסומה. לפי ה**משפט הקודם** קיימת לה תת-סידרה מונוטונית, ובשל העובדה שסדרה מונוטונית חסומה מתכנסת (משפט המונוטוניות) מתקבל שהסדרה המתאימה מתכנסת. □

1.4 קריטריון קושי להתכנסות סדרות

הצהרה:
הסדרה (a_n) מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.

הוכחה.
(כיוון ראשון, ⇐)
נניח (a_n) מתכנסת ל-L. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

ניקח את ε להיות $\frac{\varepsilon}{2}$ כלומר

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

לכן, עבור כל $m, n > N$:

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

כך (a_n) היא סדרת קושי.

(כיוון שני, ⇒) (תודה לאביב)
נניח כי (a_n) סדרת קושי. כלומר, לפי ההגדרה:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, k > N : \quad |a_n - a_k| < \varepsilon$$

נניח $\varepsilon > 0$ נתון. נבחר $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ (שימו לב שגם $N + 1 > N$ ולכן מתקיים):

$$|a_n - a_{N+1}| < \varepsilon$$

כלומר, עבור $n > N$, המרחק בין איברי הסדרה לבין האיבר הקבוע a_{N+1} קטן מ-ε.

כעת, לפי משפט בולצנו-ויירשטראס, מאחר שהסדרה חסומה (ניקח $\varepsilon = 1$ ובחלק השני יש מספר

סופי של איברים ולכן חסומה גם בו), קיימת תת-סדרה (a_{m_n}) המתכנסת לגבול כלשהו:

$$a_{m_n} \to a$$

לפי הגדרת סדרת קושי, ומכיוון שברור ש $m_n \geq n$ (אפשר להוכיח באינדוקציה והוכחנו בהרצאה), לכל $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m_n \geq n > N$:

$$|a_n - a_{m_n}| < \varepsilon$$

כלומר לפי ההגדרה של גבול $L = 0$:

$$a_n - a_{m_n} \to 0$$

ולפי חישוב גבולות:

$$\lim a_n = \lim(a_n - a_{m_n}) + \lim a_{m_n} = 0 + a = a$$

לכן, הסדרה (a_n) מתכנסת לגבול a. מכאן שהסדרה (a_n) מתכנסת. □

1.5 כלל המנה

הצהרה:
אם $0 < a_n$ לכל n אז:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

בפרט, אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to b$ אז גם $\sqrt[n]{a_n} \to b$.

הוכחה.

נתחיל בהוכחת אי השוויון:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

נחלק למקרים:
אם $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, אז ברור שהאי-שוויון נכון.
אחרת, נניח $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < c$ עבור c כלשהו. אז לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים q כך שמתקיים

$$\forall n > N, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < c.$$

(מכיוון שניתן להגביל את איברי הסדרה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ לסביבה קרובה מספיק של $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$)

לכן לכל $n > N+1$ מתקיים:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < q \Rightarrow a_n < qa_{n-1}.$$

אם גם $n-1 > N+1$ אז מתקיים:

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} < q \Rightarrow a_{n-1} < qa_{n-2}.$$

נמשיך כך עד a_{N+1}:

$$a_n < qa_{n-1} < q^2a_{n-2} < \cdots < q^{n-N-1}a_{N+1}.$$

כלומר

$$a_n < q^{n-N-1}a_{N+1}.$$

נוציא שורש מסדר n:

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{q^{n-N-1}a_{N+1}} = q^{\frac{n-N-1}{n}}\sqrt[n]{a_{N+1}}.$$

כעת, כאשר $n \to \infty$, מתקיים:

$$q^{\frac{n-N-1}{n}} \to q, \quad \sqrt[n]{a_{N+1}} \to 1.$$

ולכן

$$q^{\frac{n-N-1}{n}}\sqrt[n]{a_{N+1}} \to q < c$$

ולכן:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq c.$$

כלומר $\sqrt[n]{a_n} < c$ לכמעט כל n ולכן $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq c$ (גבולות שומרים על אי שיוויון חלש).
כלומר קיבלנו כי לכל c המקיים $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} < c$ מתקיים גם $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq c$.

נשתמש בלמה הבאה:

למה 1.1. יהיו a, b מספרים כך שלכל $a < c$ מתקיים $b \leq c$. אזי מתקיים ש $b \leq a$.

הוכחה.
(תודה לשחר עליה)
נניח בשלילה ש b גדול ממש מ a, לכן קיים מספר c ביניהם כלומר $a < c < b$, כלומר יש $c > a$ ולא מתקיים ש $b \leq c$, סתירה! ולכן $b \leq a$. □

ולכן:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

נוכיח כעת ש:

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$$

אם $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ זה ברור וסיימנו.

אחרת, $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ (a_n סדרה חיובית גדולה מ-0 ממש).

יהי c המקיים $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} > c > 0$, אז לכל $N \in \mathbb{N}$ ישנו q המקיים:

$$\forall n > N, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > q > c.$$

לכן לכל $n > N+1$ מתקיים:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > q \Rightarrow a_n > qa_{n-1}.$$

אם גם $n-1 > N+1$ אז גם:

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} > q \Rightarrow a_{n-1} > qa_{n-2}.$$

נמשיך כך עד a_{N+1}:

$$a_n > qa_{n-1} > q^2a_{n-2} > \cdots > q^{n-N-1}a_{N+1}.$$

כלומר:

$$a_n > q^{n-N-1}a_{N+1}.$$

נוציא שורש n:

$$\sqrt[n]{a_n} > \sqrt[n]{q^{n-N-1}a_{N+1}} = q^{\frac{n-N-1}{n}}\sqrt[n]{a_{N+1}}.$$

כעת, כאשר $n \to \infty$, מתקיים:

$$q^{\frac{n-N-1}{n}} \to q, \quad \sqrt[n]{a_{N+1}} \to 1.$$

ולכן

$$q^{\frac{n-N-1}{n}}\sqrt[n]{a_{N+1}} \to q > c$$

ולכן:

$$\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geq q > c.$$

כלומר $\sqrt[n]{a_n} > c$ לכמעט כל n ולכן $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geq c$ (גבולות שומרים על אי שיוויון חלש).

כלומר קיבלנו כי לכל c המקיים $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} > c$ מתקיים גם $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geq c$.

נשתמש בלמה שהוכחתי למעלה (או בעצם בהופכית שלה):

יהיו a, b מספרים כך שלכל $a > c$ מתקיים $b \geq c$. אזי מתקיים ש $b \geq a$.

לכן:

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$$

ומכיוון ש

$$\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$$

מתקיים ש:

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(המקרה הפרטי שיש בהרצאה טריוויאלי ממשפט הסנדוויץ.) □

1.6 הגדרת e

הצהרה:

הגבול

$$e \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

קיים. בנוסף, לכל n מתקיים:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

הוכחה.

נסמן:

$$a_n \coloneqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n \coloneqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

נוכיח ש:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_2 < b_1.$$

עבור $n=1$ זה ברור.

ראשית, נוכיח ש-a_n עולה ו-b_n יורדת עבור $n>1$.

נחשב:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

באמצעות אי-שוויון ברנולי:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n^2}\cdot n > 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

ולכן:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_n > a_{n-1}.$$

באופן דומה, עבור b_n:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}}$$

$$= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

אי-שוויון ברנולי הפוך:

$$\left(1+\frac{n}{n^2}\right) < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

ולכן

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{n}{n^2}\right) < \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^{n} < 1.$$

לכן:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1 \quad \Rightarrow \quad b_n < b_{n-1}.$$

לבסוף, כיוון ש-$a_n < b_n$ (טריוויאלי, ניתן להוכיח זאת באינדוקציה), מתקיים:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_2 < b_1.$$

מכיוון ש-a_n סדרה עולה וחסומה מלמעלה (על ידי b_1), היא מתכנסת, וכך גם b_n מתכנסת (יורדת, חסומה מלמטה על ידי a_1).
כעת נראה שלשתי הסדרות גבול משותף. נשים לב ש:

$$b_n = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim a_n.$$

לכן, שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול. נסמן:

$$e := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

כפי שנדרש.

בנוסף, לכל n מתקיים:

$$a_n < e < b_n \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(מכיוון ש a_n סדרה עולה, כלומר האיברים שלה שואפים לגבול משמאל ולכן הסדרה בהכרח קטנה מהגבול שלה, ואותו טיעון כלפי b_n).
וכך הוכחנו את המשפט.

□

---

2 טורים חיוביים ומבחנים לשיעורם

2.1 מבחן השורש לטור חיובי

הצהרה:
אם

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

אני אביא פה שתי הוכחות: אחת של ארז ואחת של בועז.

הוכחה של ארז:
נסמן ונניח כי:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d < 1.$$

מכיוון שהוכחנו בהרצאה כי $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ הוא הגבול החלקי המקסימלי של הסדרה והוא קטן מ-1, הרי 1 איננה גבול חלקי – ולכן קיימת סביבה של 1 שכוללת רק מספר סופי של איברים.
לכן, החל ממקום מסוים מתקיים:

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{1+d}{2} < 1.$$

לכן:

$$a_n < \left(\frac{1+d}{2}\right)^n.$$

מאחר ו-$\frac{1+d}{2} < 1$ הטור ההנדסי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+d}{2}\right)^n$$

מתכנס, ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון לטורים חיוביים הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הוכחת בועז:
ראשית, נוכיח את הלמה הבאה:

למה 2.1. תהי סדרה x_n. אז מתקיים:

$$\text{קיים } q<1 \quad \text{כך ש- } x_n<q \text{ לכמעט כל } n \quad \iff \quad \overline{\lim}_{n\to\infty}x_n<1.$$

הוכחה.

(כיוון ראשון)

מכיוון שהוכחנו בהרצאה כי $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ הוא הגבול החלקי המקסימלי של הסדרה והוא קטן מ-1, הרי 1 איננה גבול חלקי – ולכן קיימת סביבה של 1 שכוללת רק מספר סופי של איברים. כלומר, קיים $q<1$ כך ש-$x_n<q$ לכמעט כל n.

(כיוון שני)

אם קיים $q<1$ כך ש-$x_n<q$ לכמעט כל n, אז כל גבול חלקי יהיה לכל היותר q ולכן $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n\leq q<1$. □

עכשיו, לפי הלמה, בהנחה ש:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1,$$

קיים $q<1$ כך ש-$\sqrt[n]{a_n}<q$ לכמעט כל n, ולכן:

$$a_n<q^n.$$

מכיוון ש-$0<q<1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ מתכנס, ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

מקרה בו הגבול העליון גדול מ־1(לא נדרש בתקציר אבל לאדע):

נניח כי:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=d>1.$$

אז לפי ההגדרה של הגבול העליון, לכל q שמקיים $1<q<d$, קיימת תת־סדרה (a_{n_k}) כך שמתקיים:

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}}>q \quad \text{לכל} \quad k.$$

נעלה כל אגף בחזקת n_k:

$$a_{n_k}>q^{n_k}.$$

ומכיוון ש-$q>1$, הטור $\sum q^{n_k}$ מתבדר (זו תת־סדרה של טור הנדסי מתבדר).

לכן, מתקבל שתת־סדרה של הטור $\sum a_n$ אינה מתכנסת, ומאחר שטור חיובי מתכנס אם ורק אם הסכומים החלקיים שלו חסומים, נובע:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ מתבדר}.$$

□

2.2 מבחן המנה לטור חיובי

הצהרה:
אם

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1,$$

אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

הוכחה.

על פי **כלל המנה** מתקבל:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1.$$

לכן, לפי מבחן השורש לטור חיובי, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. □

2.3 מבחן העיבוי לטורים חיוביים

הצהרה:
תהי (a_n) סדרה חיובית ומונוטונית יורדת. אז הטורים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad \text{ו-} \quad \sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$$

חברים – כלומר, הם מתכנסים או מתבדרים יחד.

הוכחה.

לפי למה שהוכחנו בהרצאה, הכנסת סוגריים לטור המתכנס במובן הרחב לא משפיעה על סכומו, ולכן:

$$\sum a_n=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})$$

מכיוון ש-a_n מונוטונית יורדת, בכל קבוצה של 2^k איברים מתקבל:

$$a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}-1}\leq 2^k\cdot a_{2^k}.$$

ולכן

$$\sum a_n=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})\leq a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^k a_{2^k}=a_1+\sum 2^n a_{2^n}.$$

וגם מתקיים ש:

$$2a_4 \leq a_2 + a_3, \quad a_2 \leq a_1$$

ולכן

$$\sum 2^{n-1}a_{2^n} = a_2+2a_4+4a_8+\cdots \leq \sum a_n = a_1+\sum(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}-1}).$$

ולכן:

$$\sum 2^{n-1}a_{2^n} \leq \sum a_n \leq a_1 + \sum 2^n a_{2^n}.$$

כלומר, אם $a_1 + \sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס, ואם $\sum 2^{n-1}a_{2^n}$ מתבדר, אז גם $\sum a_n$ מתבדר.

מכיוון שהכפלת טור באיבר לא משנה את התכנסותו/התבדרותו והוספת איבר לטור לא משנה גם כן, אזי: אם $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס, ואם $\sum 2^n a_{2^n}$ מתבדר, אז גם $\sum a_n$ מתבדר, כלומר הם חברים. □

2.4 משפט לייבניץ

הצהרה:
אם (a_n) היא סדרה מונוטונית יורדת של מספרים חיוביים כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

מתכנס, ובנוסף שאריות הטור מקיימות:

$$|r_k| \leq a_{k+1}.$$

הוכחה.
נוכיח קודם את קריטריון קושי להתכנסות טורים:
פשוט מאוד, אם הסס"ח היא סדרת קושי היא בהכרח גם מתכנסת ולכן גם הטור מתכנס.
נוכיח כי סדרת הסכומים החלקיים של הטור הנה סדרת קושי, ועל כן הטור מתכנס.

יהי $\varepsilon > 0$. צריך למצוא מקום בסדרה שממנו והלאה ההפרש בין כל שני איברים קטן מ-ε.

$$|S_m - S_n| = \left|(-1)^{m+1}a_m + \cdots + (-1)^{n+2}a_{n+1}\right| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-2} - \dots|$$

נראה כי כל איבר "מבטל" את הקודמים, לפי המונוטוניות של הסדרה:

$$0 < a_m < a_{m-1}$$

(הסדרה חיובית ויורדת), ולכן:

$$-a_{m-1} < a_m - a_{m-1} < 0$$

לכן:

$$a_{m-2} - a_{m-1} < a_m - a_{m-1} + a_{m-2} < a_{m-2} + 0$$

$$0 < a_m - a_{m-1} + a_{m-2} < a_{m-2}$$

ומכאן עד שקיבלנו:

$$|S_m - S_n| < a_{n+1}$$

וכיוון ש(a_n) שואפת ל0 אז החל ממקום מסוים זה קטן מ- ε (ללא תלות ב- M), לכן זו סדרת קושי ולכן הטור מתכנס.
לפי טיעון דומה

$$\left|\sum_{n=k+1}^{K}(-1)^{n+1}a_n\right| = |a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - \dots| \le a_{k+1}$$

ולכן,

$$|r_k| = \lim_{K\to\infty}\left|\sum_{n=k+1}^{K}(-1)^{n+1}a_n\right| \le a_{k+1}.$$

□

2.5 משפט רימן לטורים מתחלפים

הצהרה:
אם טור מתכנס בתנאי, אז על ידי שינוי סדר האיברים שלו ניתן לקבל כל סכום רצוי.

הוכחה.
נוכיח קודם טענת עזר:
טענה:
אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז טור האיברים החיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ וטור האיברים השליליים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ (כאשר a_n^- מוגדר כשלילי או אפס) שניהם מתבדרים.
במילים אחרות, סכום האיברים החיוביים הוא ∞ וסכום הערכים המוחלטים של האיברים השליליים הוא ∞.

הוכחה.
נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי. כלומר, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אך $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.
נגדיר את החלקים החיוביים והשליליים של a_n באופן הבא:

$$a_n^+ = \max(a_n, 0) = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \min(a_n, 0) = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

אז מתקיים:

$$a_n^+ \geq 0, \quad a_n^- \leq 0, \quad a_n = a_n^+ + a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ - a_n^- = a_n^+ + |a_n^-|.$$

נניח בשלילה כי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנסים.
אז סכומם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$ מתכנס (סכום של טורים מתכנסים מתכנס),
וכן הפרשם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-)$ מתכנס (כי הפרש של טורים מתכנסים מתכנס).
אבל לפי ההנחה הטור מתכנס בתנאי ולכן הטור-$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר, ולכן יש לנו סתירה.

לפיכך, לפחות אחד מהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ או $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ חייב להתבדר.
נניח בשלילה כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתכנס.
כיוון ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, הרי שגם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ חייב להתכנס.
אבל אם שני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנסים, זה מוביל לסתירה עם כך ש-$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.
לכן, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ חייב להתבדר.
כיוון ש-$a_n^+ \geq 0$, טור חיובי שמתבדר חייב להתבדר ל-∞, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$.

באופן דומה, נניח בשלילה כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנס.
אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ חייב להתבדר כדי ש-$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ יתבדר.
אבל אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנס ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתבדר ל-∞, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתבדר ל-∞,
וזה סותר את הנתון ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

לכן, גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ חייב להתבדר. כיוון ש-$a_n^- \leq 0$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתבדר למינוס אינסוף.
לסיכום, אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty.$$

□

כעת נוכיח את משפט רימן:
הוכחה:

נסמן את האיברים החיוביים של הטור המקורי לפי סדר הופעתם ב-$P_1, P_2, P_3, \ldots$,
ואת האיברים השליליים (או אפס) של הטור המקורי לפי סדר הופעתם ב-$N_1, N_2, N_3, \ldots$.
מחלק א' אנו יודעים כי:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |N_i| = \infty.$$

מקרה 1: התכנסות למספר ממשי L

יהי $L \in \mathbb{R}$ מספר ממשי כלשהו. נבנה טור מסודר מחדש שסכומו L.

1. נבחר את מספר האיברים החיוביים הראשונים $P_1, P_2, \ldots, P_{k_1}$ כך שסכומם יהיה גדול מ-L בפעם הראשונה:
$$\sum_{i=1}^{k_1} P_i > L \quad \text{אבל} \quad \sum_{i=1}^{k_1-1} P_i \leq L .$$
2. נוסיף את מספר האיברים השליליים הראשונים $N_1, N_2, \ldots, N_{j_1}$ כך שסכום האיברים החיוביים שכבר בחרנו ועוד סכום האיברים השליליים הללו יהיה קטן מ-L בפעם הראשונה:
$$\sum_{i=1}^{k_1} P_i + \sum_{i=1}^{j_1} N_i < L \quad \text{אבל} \quad \sum_{i=1}^{k_1} P_i + \sum_{i=1}^{j_1-1} N_i \geq L .$$
3. נמשיך בתהליך הזה:

- בשלב ה-m, נוסיף את מספר האיברים החיוביים הבאים $P_{k_{m-1}+1}, \ldots, P_{k_m}$ כך שהסכום יהיה שוב מעל L.
- לאחר מכן, נוסיף את מספר האיברים השליליים הבאים $N_{j_{m-1}+1}, \ldots, N_{j_m}$ כך שהסכום יחזור להיות קטן מ-L.

בגלל שהתורים $\sum P_i$ ו-$\sum |N_i|$ מתבדרים לאינסוף, תמיד נוכל לבחור מספיק איברים כדי לגרום לסכום להתנדנד סביב L.
לבסוף, כיוון שהאיברים P_i ו-N_i שואפים לאפס (הרי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי כלומר הסדרה a_n שואפת ל0 וכך גם כל התתי סדרות שלה), אז התנודות סביב L קטנות והסכום החלקי מתכנס ל-L.

■

מקרה 2: התבדרות לאינסוף (∞)

נבנה טור מסודר מחדש שמתבדר לאינסוף.

1. נבחר את מספר האיברים החיוביים הראשונים $P_1, P_2, \ldots, P_{k_1}$ כך שסכומם יהיה גדול מ-1.
2. נוסיף איבר שלילי אחד N_1.

3. נוסיף את האיברים החיוביים הבאים $P_{k_1+1}, \ldots, P_{k_2}$ כך שסכומם יהיה גדול מ-2.
4. נוסיף איבר שלילי אחד N_2.
5. נמשיך בתהליך זה כך שבשלב ה-m, סכום האיברים החיוביים יהיה לפחות m.

כל פעם אנחנו חוזרים אחורה בגודל האיבר השלילי הבא ומכיוון הטור a_n מתכנס בתנאי אז סדרת האיברים a_n ובפרט (כי זה תת סדרה שלה) a_n^- מתכנסות ל0 ולכן הגודל של האיבר השלילי הזה שואף ל0 ולכן אפשר להבטיח שהחל משלב מסוים האיברים השליליים גדולים ממינוס 1 ולכן הטור מתבדר לאינסוף.

■

מקרה 3: התבדרות למינוס אינסוף ($-\infty$)

נבנה טור מסודר מחדש שמתבדר למינוס אינסוף.

1. נבחר את מספר האיברים השליליים הראשונים $N_1, N_2, \ldots, N_{j_1}$ כך שסכום הערכים המוחלטים שלהם יהיה גדול מ-1, כלומר סכומם יהיה קטן מ--1.
2. נוסיף איבר חיובי אחד P_1.
3. נוסיף את האיברים השליליים הבאים $N_{j_1+1}, \ldots, N_{j_2}$ כך שסכום הערכים המוחלטים שלהם יהיה גדול מ-2, כלומר סכומם יהיה קטן מ--2.
4. נוסיף איבר חיובי אחד P_2.
5. נמשיך בתהליך הזה כך שבשלב ה-m, סכום האיברים השליליים יהיה לכל הפחות $-m$.

כל פעם אנחנו חוזרים קדימה בגודל האיבר החיובי הבא ומכיוון הטור a_n מתכנס בתנאי אז סדרת האיברים a_n ובפרט (כי זה תת סדרה שלה) a_n^+ מתכנסות ל0 ולכן הגודל של האיבר החיובי הזה שואף ל0 ולכן אפשר להבטיח שהחל משלב מסוים האיברים החיוביים קטן מ-1 ולכן הטור מתבדר למינוס אינסוף.

■

מקרה 4: התבדרות שאינה מתכנסת בכל מובן (לא לאינסוף ולא למינוס אינסוף)

נבנה טור מסודר מחדש לפי התהליך הבא:

1. נבחר מספיק איברים חיוביים עד שסכום החלקי עולה על 2, כך שהסכום מגיע ל-2 לפחות.
2. נוסיף מספיק איברים שליליים עד שסכום החלקי יורד מתחת ל--1, כלומר הסכום מגיע למינוס 1.
3. נבחר שוב מספיק איברים חיוביים עד שסכום החלקי עולה מעל 4.
4. נוסיף שוב מספיק איברים שליליים עד שסכום החלקי יורד מתחת ל--3.

5. נמשיך בתהליך זה באופן אינסופי כך שהסכומי החלקיים מקפצים לפי הסדרה:

$$S_{n_1} < -1, \quad S_{n_2} > 2, \quad S_{n_3} < -3, \quad S_{n_4} > 4, \quad \dots$$

כך, הסכומים החלקיים מתנדנדים בין ערכים קבועים (המתרחקים מהאפס בכל פעם) ואין להם גבול סופי (יש להם שני ג"ח), אך הם אינם נוטים לאינסוף או למינוס אינסוף. ■

סיכום: הוכחנו שאם טור מתכנס בתנאי, ניתן לסדר מחדש את איבריו כך שיתכנס לכל מספר ממשי רצוי, או יתבדר לאינסוף או למינוס אינסוף או יתבדר בכלל.
זהו משפט רימן לטורים מתכנסים בתנאי.

□

---

3 גבולות לפונקציות

3.1 אי-קיום גבול לפונקציה

הצהרה:
נניח שיש סדרות $a \neq x_n \to a$ בתחום הפונקציה. התכונות הבאות שקולות:

1. הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ לא קיים במובן הרחב.
2. יש בתחום ההגדרה סדרות $a \neq x_n, y_n \to a$ כך שהגבולות $\lim\limits_{x\to a} f(x_n)$, $\lim\limits_{x\to a} f(y_n)$ קיימים במובן הרחב ושונים.

הוכחה.

כיוון ראשון $\Rightarrow$:
טריוויאלי, אנחנו צריכים שכל הסדרות יגרמו לפונקציה לשאוף לאותו הדבר (לפי הנחת הגבול), ולכן מכיוון שהן שואפות לשני ערכים שונים, הגבול לא קיים.

כיוון שני $\Leftarrow$:
נחלק למקרים:

1. יש סדרה $a \neq x_n \to a$ כך ש-$\lim\limits_{x\to a} f(x_n)$ לא קיים במובן הרחב. לכן:

$$f(x_{m_n}) \to b \coloneqq \underline{\lim} f(x_n) < f(x_{k_n}) \to c \coloneqq \overline{\lim} f(x_n)$$

   והנה שתי סדרות שונות ששואפות ל-a ומביאות גבולות שונים.

2. לכל סדרה $a \neq x_n \to a$ הגבול $\lim f(x_n)$ קיים במובן הרחב אבל יש סדרות שונות כאלה עם גבולות במובן הרחב אבל גבולות שונים.

□

3.2 משפט ערך הביניים לפונקציות

הצהרה:
אם f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ ו-$f(a) \neq f(b)$, אז לכל d בין $f(a)$ ל-$f(b)$ (או בין $f(b)$ ל-$f(a)$) קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-$f(c) = d$.

הוכחה.

מקרה ראשון: $f(a) < f(b)$, כלומר $f(a) < d < f(b)$.
נבחר:

$$c \coloneqq \sup\{x \in [a,b] : f(x) \leq d\}.$$

הקבוצה אינה ריקה (כי a נמצא בה) וחסומה מלמעלה על ידי b.
ניקח סדרה $x_n \to c$.
מרציפות של f מתקיים ש $f(x_n) \to f(c)$, ולפי הגדרת c מתקיים ש-$f(x_n) \leq d$ ולכן מתקיים גם $f(c) \leq d$ (כי גבולות שומרים על אי-שוויון חלש).

נשים לב שמתקיים:

$$f(c) \leq d < f(b)$$

כלומר $f(c) \neq f(b)$ ומחח"ע $c \neq b$, ובהכרח גם $c < b$ (כי הסדרה חסומה מלעיל על ידי b).

נניח בשלילה כי מתקיים $f(c) < d$. ניקח סדרה $c_n \to c^+$ כך ש-$b > c_n$. מהרציפות של f נקבל ש:

$$f(c_n) \to f(c) \leq d$$

ולכן לכמעט כל n מתקיים $f(c_n) \leq d$. בפרט, מתקיים:

$$\sup\{x \in [a,b] \mid f(x) \leq d\} = c < c_n \in \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq d\}$$

בסתירה, כיוון ש-c אמור להיות הגדול ביותר בקבוצה זו לפי ההגדרה.

לכן, קיבלנו מהסתירה ש $f(c) \geq d$, ובנוסף הוכחנו קודם ש $f(c) \leq d$, ולכן:

$$f(c) = d.$$

מקרה שני: $f(a) > f(b)$, כלומר $f(a) > d > f(b)$. (תודה לאליאור)
נפעיל את מה שקיבלנו מהמקרה הראשון על $-f$ ולכן המקרה השני מתקיים גם ל-f:

$$f(a) > f(b) \to f(a) > d > f(b)$$

ולכן

$$-f(b) > -f(a) \to -f(b) > -d > -f(a)$$

נסמן

$$.g(x) = -f(x)$$

g רציפה כמכפלת פונקציות רציפות ($f, (-1)$), בנוסף על כך מתקיים $g(a) < -d < g(b)$ ולכן g מקיימת את המקרה הראשון (עם $-d$) עליו הוכחנו שקיימת c כך ש $g(c) = -d$ ולכן:

$$g(c) = -f(c) = -d \to f(c) = d$$

□

3.3 משפט ויירשטרס

הצהרה:
אם f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$, אז f מקבלת בו את ערכי המקסימום והמינימום הגלובליים (ובפרט, היא חסומה שם).

הוכחה.
נוכיח כי הפונקציה חסומה.
תהי f רציפה בקטע $[a, b]$. נניח בשלילה שהיא לא חסומה מלעיל. אם f לא חסומה מלעיל, אז אפשר לבחור סדרה x_n כך שמתקיים $n \leq f(x_n)$. לכן, הסדרה $f(x_n)$ שואפת לאינסוף.

מצד שני, $x_n \in [a, b]$ היא סדרה חסומה ולכן יש לה תת-סדרה מתכנסת $c_n \to c$ (הוכחתי למעלה למה). מהרציפות של f, מתקיים:

$$f(c_n) \to f(c).$$

מכיוון שהסדרה $f(x_n)$ שואפת לאינסוף, הרי שגם תת-הסדרה $f(c_n)$ אמורה לשאוף לאינסוף, וזה מוביל לסתירה (כי הגבולות החלקיים אמורים להיות שווים כאשר הסדרה מתכנסת).

באופן דומה, נניח בשלילה ש-f אינה חסומה מלרע. כלומר, קיימת סדרה $x_n \in [a, b]$ כך שמתקיים $f(x_n) \leq -n$. מכאן נובע כי הסדרה $f(x_n)$ שואפת למינוס אינסוף.

שוב, x_n היא סדרה חסומה ולכן קיימת לה תת-סדרה מתכנסת $c_n \to c$. מהרציפות של f, מתקיים:

$$f(c_n) \to f(c).$$

מכיוון שהסדרה $f(x_n)$ שואפת למינוס אינסוף, הרי שגם תת-הסדרה $f(c_n)$ אמורה לשאוף למינוס אינסוף, וזה מוביל לסתירה (כי הגבולות החלקיים אמורים להיות שווים).

לפיכך, f חסומה.

נוכיח כי f מקבלת מקסימום:

נסמן:

$$s \coloneqq \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

(קיים כי הקבוצה חסומה מלעיל).

נוכל לקחת סדרה $x_n \in [a,b]$ המקיימת $\lim f(x_n) = s$

כיוון ש-$x_n \in [a,b]$ היא סדרה חסומה, יש לה תת-סדרה מתכנסת $c_n \to c$. מהרציפות של f, מתקיים:

$$f(c_n) \to f(c).$$

הסדרה $f(x_n)$ מתכנסת, ולכן הגבול שלה שווה לכל הגבולות החלקיים שלה:

$$f(c) = s.$$

כלומר:

$$f(c) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

ומתקיים ש-c היא נקודת מקסימום.
נוכיח כי f מקבלת מינימום:
נסמן:

$$t \coloneqq \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

(קיים כי הקבוצה חסומה מלרע).

נוכל לקחת סדרה $x_n \in [a,b]$ המקיימת $\lim f(x_n) = t$.

כיוון ש-$x_n \in [a,b]$ היא סדרה חסומה, יש לה תת-סדרה מתכנסת $c_n \to c$. מהרציפות של f, מתקיים:

$$f(c_n) \to f(c).$$

הסדרה $f(x_n)$ מתכנסת, ולכן הגבול שלה שווה לכל הגבולות החלקיים שלה:

$$f(c) = t.$$

כלומר:

$$f(c) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

ומתקיים ש-c היא נקודת מינימום.

□

3.4 משפט קנטור

הצהרה:
פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במידה שווה.

הוכחה.
תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. נניח בשלילה שהיא לא רציפה במידה שווה. כלומר, קיימות שתי סדרות a_n, a'_n כך ש:

$$|a_n - a'_n| \to 0 \quad \text{אך} \quad |f(a_n) - f(a'_n)| \not\to 0.$$

משמע, קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל n, מתקיים:

$$|f(a_n) - f(a'_n)| \geq \varepsilon.$$

ניקח תת-סדרות:

$$b_n \coloneqq a_{m_n}, \quad b'_n \coloneqq a'_{m_n}.$$

כיוון ש-$b_n \in [a,b]$ היא סדרה חסומה, יש לה תת-סדרה מתכנסת $c_n \to c$. אותו הדבר מתקיים גם עבור b'_n, ובנוסף הסדרה $|b_n - b'_n| \to 0$, כיוון שהיא תת-סדרה של $|a_n - a'_n|$.
נסמן:

$$\lim c_n = c, \quad \lim c'_n = c'.$$

כיוון ש-$|c_n - c'_n| \to 0$ (כי היא תת סדרה של $|b_n - b'_n| \to 0$), מתקבל מחשבון גבולות $c = c'$.
מהרציפות של f, מתקבל:

$$\lim f(c_n) = \lim f(c'_n) = f(c).$$

ולכן:

$$\lim |f(c_n) - f(c'_n)| = |f(c) - f(c)| = 0.$$

אבל $|f(c_n) - f(c'_n)|$ היא תת-סדרה של $|f(a_n) - f(a'_n)|$, ולכן גם היא חסומה מלרע על ידי $\varepsilon > 0$ סתירה. □

---

4 נגזרות וכללי גזירה

4.1 גזירה מול רציפות

הצהרה:
אם f גזירה בנקודה a, אז f רציפה בנקודה a.

הוכחה.

מהגדרת הנגזרת:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

נכפול במכנה ונקבל:

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a))=\lim_{h\to 0}h\cdot f'(a)=0.$$

ולכן מחשבון גבולות:

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h))-\lim_{h\to 0}(f(a))=0.$$

ברור ש

$$\lim_{h\to 0}(f(a))=f(a)$$

ולכן:

$$\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a).$$

□

4.2 נגזרת פונקציה הופכית

הצהרה:
אם f מונוטונית ממש ורציפה בסביבה של נקודה a ויש לה נגזרת $f'(a)\neq 0$ (וקיימת), אז הפונקציה ההופכית f^{-1} גזירה בנקודה $b=f(a)$ ומקיימת:

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(a)}.$$

הוכחה.
קודם כל נוכיח את הלמה הבאה:

למה 4.1. אם f עולה ממש ורציפה בקטע מוכלל, אז הפונקציה ההופכית שלה f^{-1} עולה ממש ורציפה גם כן.

הוכחה.

תהי f פונקציה עולה ממש ורציפה בקטע מוכלל כולשהו.
נוכיח כי f^{-1} רציפה בנקודה $y=f(x)$.

נניח כי $y_n\to y$ עבור סדרה y_n, ונגדיר $x_n=f^{-1}(y_n)$, כלומר, $f(x_n)=y_n$.

מכיוון ש-f עולה ממש, לכל $\varepsilon>0$ מתקיים:

$$f(x-\varepsilon)<f(x)<f(x+\varepsilon).$$

ולכן, לכל n מספיק גדול מתקיים:

$$f(x-\varepsilon) < y_n < f(x+\varepsilon).$$

לכן, מהיות f פונקציה חח"ע (כי היא הפיכה), מתקיים:

$$x-\varepsilon < x_n < x+\varepsilon.$$

כלומר, מתקיים $x_n \to x$, ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = x = f^{-1}(y).$$

מכאן נובע ש-f^{-1} רציפה ב-y. □

נמשיך להוכחה של הנגזרת: נניח ש-f עולה ממש.
לכן גם f^{-1} עולה ממש ורציפה בנקודה b.
ניקח סדרה $t_n \to b$ כך ש-$t_n \neq b$.
מהרציפות של f^{-1}, מתקיים:

$$\lim f^{-1}(t_n) = f^{-1}(b) = a.$$

נסמן:

$$x_n := f^{-1}(t_n).$$

אז מתקיים $x_n \to a$, וכיוון ש-f חח"ע (שוב, הפיכה), מתקיים $x_n \neq a$ לכל n. לכן:

$$\lim_{x_n\to a} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = f'(a).$$

בגלל ש-f עולה ממש, מתקיים $f'(a) > 0$, ולכן:

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(t_n)-f^{-1}(b)}{t_n-b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n-a}{t_n-b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n-a}{f(x_n)-f(a)} = \lim_{x_n\to a} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

לחלופין,
נניח ש-f יורדת ממש. לכן גם f^{-1} יורדת ממש ורציפה בנקודה b. ניקח סדרה $t_n \to b$ כך ש-$t_n \neq b$.
מהרציפות של f^{-1}, מתקיים:

$$\lim f^{-1}(t_n) = f^{-1}(b) = a.$$

נסמן:

$$x_n := f^{-1}(t_n).$$

אז מתקיים $x_n \to a$, וכיוון ש-f חח"ע, מתקיים $x_n \neq a$ לכל n. לכן:

$$\lim_{x_n\to a} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = f'(a).$$

בגלל ש-f יורדת ממש, מתקיים $f'(a) < 0$, ולכן:

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(t_n) - f^{-1}(b)}{t_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{t_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \lim_{x_n\to a} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

4.3 כלל השרשרת

הצהרה:
לכל פונקציות f ו-g גזירות מתקיים:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

הוכחה.
לפי הגדרת הנגזרת:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}.$$

נחלק את ההוכחה לשני מקרים:

מקרה 1: $f(x) \neq f(x_0)$

נשתמש בעובדה שאלגברית ניתן לכתוב זאת כך:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

(מותר לחלק ב $x - x_0$ מכיוון שלפי הגדרה של גבול הם אף פעם לא יהיו שווים).
כיוון ש-f גזירה בנקודה x_0, היא בהכרח רציפה בנקודה זו, ולכן מתקיים:

$$f(x) \to f(x_0) \quad \text{כאשר} \quad x \to x_0.$$

בנוסף, כיוון ש-g גזירה בנקודה $f(x_0)$, גם היא רציפה שם, ולכן:

$$\lim_{f(x)\to f(x_0)} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = g'(f(x_0)).$$

כמו כן, לפי הגדרת הנגזרת של f, מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

לכן, מהכפל של שני הגבולות מתקבל:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

מקרה 2: $f(x) = f(x_0)$

במקרה זה, מתקיים:

$$f(x) - f(x_0) = 0.$$

לכן, עבור כל x בסביבה של x_0, נגזרתו של f היא:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

כיוון ש-$f(x) = f(x_0)$ לכל x, מתקיים גם:

$$g(f(x)) = g(f(x_0)).$$

ולכן ההפרש במונה מתאפס:

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = 0.$$

מכאן נובע:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

כלומר, מתקיים:

$$(g \circ f)'(x_0) = 0.$$

בנוסף, קיבלנו גם ש-$f'(x_0) = 0$, ולכן מתקיים:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot 0 = 0.$$

וזה מה שהיה צריך להוכיח.

□

4.4 נגזרת $\arcsin x$

הצהרה:

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

הוכחה.
נסמן $y = \arcsin x$ כך ש-$x = \sin y$ כאשר $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (ולכן $\cos y \geq 0$).

לפי כלל הנגזרת של הפונקציה ההופכית:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\cos y}.$$

ומכיוון ש-$\cos y = \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$, מתקבל:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

4.5 משפט פרמה

הצהרה:
אם c היא נקודת מקסימום או מינימום מקומי של f בתוך קטע פתוח, והנגזרת $f'(c)$ קיימת, אז:

$$f'(c) = 0.$$

הוכחה.
עבור מקסימום:
תהי c שיש לה סביבה U כך שמתקיים:

$$f(c) = \max_{x\in U} f(x),$$

כלומר, לכל h מתקיים:

$$f(c+h) \le f(c).$$

לפי הגדרת הנגזרת מתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c).$$

נחשב את הגבולות מימין ומשמאל (נניח $h \in U$):

מימין:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\underbrace{f(c+h)-f(c)}_{\le 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \le 0.$$

משמאל:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\underbrace{f(c+h)-f(c)}_{\le 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \ge 0.$$

אבל מכיוון שהנגזרת קיימת, שני הגבולות שווים ולכן:

$$0 \leq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0.$$

לפיכך, בהכרח:

$$f'(c) = 0.$$

עבור מינימום:
נאמר שלפי מה שהוכחנו מקודם נפעיל את זה על $-f$ ולכן יש לה נקודת מקסימום בקטע ולכן לf יש נקודת מינימום בקטע, או למי שרוצה:
תהי c שיש לה סביבה U כך שמתקיים:

$$f(c) = \min_{x\in U} f(x),$$

כלומר, לכל h מתקיים:

$$f(c+h) \geq f(c).$$

לפי הגדרת הנגזרת מתקיים:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c).$$

נחשב את הגבולות מימין ומשמאל (נניח $h \in U$):

מימין:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0.$$

משמאל:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \leq 0.$$

אבל מכיוון שהנגזרת קיימת, שני הגבולות שווים ולכן:

$$0 \geq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0.$$

לפיכך, בהכרח:

$$f'(c) = 0.$$

□

4.6 משפט רול'

הצהרה:
אם f היא פונקציה רציפה וגזירה בקטע $[a,b]$ ומתקיים $f(a)=f(b)$, אז קיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש-$f'(c)=0$.

הוכחה.

מכיוון ש-f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, על פי **משפט ויירשטראס** היא מקבלת בו מקסימום c ומינימום d, כלומר קיימות נקודות $c,d\in[a,b]$ כך ש:

$$f(c)=\max_{x\in[a,b]} f(x),\quad f(d)=\min_{x\in[a,b]} f(x).$$

נחלק למקרים:

מקרה ראשון: $f(c)=f(d)$

במקרה זה, הפונקציה f קבועה לכל x בקטע (כלומר קו ישר המקביל לציר ה-x), ולכן מתקיים:

$$f'(x)=0\quad \forall x\in(a,b).$$

בפרט, ניתן לבחור $c\in(a,b)$ כך ש-$f'(c)=0$, כנדרש.

מקרה שני: $f(c)\neq f(d)$

אם $f(c)\neq f(d)$, לפחות אחת מהנקודות c או d אינה בקצוות הקטע $\{a,b\}$ (אחרת היה מתקבל $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$, בסתירה להנחה $f(c)\neq f(d)$).

לפיכך, לפחות אחת מהן היא נקודת מקסימום או מינימום פנימית בקטע (a,b), ומכיוון שהנגזרת קיימת בכל הקטע הפתוח (a,b), ניתן להפעיל את **משפט פרמה**, אשר קובע כי בנקודת מקסימום או מינימום פנימית הנגזרת מתאפסת:

$$f'(c)=0.$$

וזה מה שהיה צריך להוכיח. □

4.7 משפט הערך הממוצע לגרנז'

הצהרה:
אם f רציפה וגזירה בקטע $[a,b]$, אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

הוכחה.
ניקח את הנקודות $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ ונחשב את הישר שעובר ביניהן:

$$l(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a).$$

זוהי משוואה של קו ישר, ולכן $l(x)$ היא פונקציה רציפה וגזירה, כלומר, היא רצגזית בקטע $[a, b]$.

נסמן פונקציה חדשה:

$$g(x) = f(x) - l(x).$$

מאחר ש-$f(x)$ ו-$l(x)$ הן פונקציות רצגזיות, גם $g(x)$ רצגזית בקטע $[a, b]$.

כעת, נחשב את ערכי $g(x)$ בקצוות:

$$g(a) = f(a) - l(a) = f(a) - f(a) = 0,$$

$$g(b) = f(b) - l(b) = f(b) - f(b) = 0.$$

כלומר, הפונקציה $g(x)$ מקיימת את תנאי **משפט רול**, ולכן קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש-$g'(c) = 0$, כלומר:

$$g'(c) = f'(c) - l'(c) = 0.$$

כיוון שנגזרת הישר היא:

$$l'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

נקבל:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

ולכן קיימת נקודה c עבורה:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

וזה מה שהיה צריך להוכיח.

□

---

5 כלל לופיטל

5.1 כלל לופיטל עבור הביטוי $\frac{0}{0}$

הצהרה:
תהיינה f, g פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות ב-(a, b) כך ש-$g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a, b)$ וגם $f(a) = g(a) = 0$. אם:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

אז:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

הוכחה.

הוכחת כלל לופיטל במקרה $x\to 0^+$

כיוון שהגבול לא תלוי בערך הפונקציה בנקודה 0, אפשר להניח ש

$$f(0)=g(0)=0.$$

כך שהפונקציות רציפות מימין בנקודה 0
כמו כן, נניח כי קיים הגבול:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}.$$

נרצה להוכיח:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=b.$$

הוכחה.

נבחר סדרה $x_n\to 0^+$ כאשר לכל n מתקיים $x_n>0$. נוכיח כי:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to b.$$

נשים לב כי:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f(x_n)-f(0)}{g(x_n)-g(0)}.$$

לפי משפט הערך הממוצע המוכלל, קיימת נקודה $c_n\in(0,x_n)$ כך ש:

$$\frac{f(x_n)-f(0)}{g(x_n)-g(0)}=\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

ולכן:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

מאחר ש־$x_n\to 0^+$, גם $c_n\to 0^+$ (מכיוון שהטווח של הקטע גדל).
לפי ההנחה ש־$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b$, מתקבל:

$$\lim_{c_n\to 0^+}\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}=b$$

ולכן:

$$\lim_{x_n\to 0^+}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=b.$$

מכיוון שהטענה נכונה לכל סדרה $x_n\to 0^+$, מתקבל לפי הגדרת הגבול:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=b.$$

□

הוכחת המקרה של $x\to 0^-$

מקרה זה נובע מהמקרה הקודם:

נסמן: $t:=-x\to 0^+$ הפונקציות $f(-t),g(-t)$ מקיימות את תנאי המקרה $t\to 0^+$, ולכן:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(-t)}{g(-t)}$$

ולפי כלל לופיטל שהוכחנו קודם:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(-t)}{g(-t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(f(-t))'}{(g(-t))}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-f'(-t)}{-g'(-t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(-t)}{g'(-t)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

הוכחת המקרה של $x\to 0$

המקרה נובע משני המקרים הקודמים.

הוכחת המקרה של $x\to a^{+-}$

נסמן: $t:=x-a\to 0^{+-}$.

הפונקציות $f(a+t),g(a+t)$ מקיימות את תנאי המקרה $t\to 0,0^{+-}$ ולכן:

אם $x\to a^+$:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(a+t)}{g(a+t)}$$

מכלל לופיטל שהוכחנו:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(a+t)}{g(a+t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(a+t)}{g'(a+t)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

אם $x\to a^-$:

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(a+t)}{g(a+t)}$$

מכלל לופיטל שהוכחנו:

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{f(a+t)}{g(a+t)}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f'(a+t)}{g'(a+t)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

הוכחת המקרה של $x\to a$

המקרה נובע משני המקרים הקודמים.

הוכחת המקרה של $x \to \infty$

נסמן: $t := \frac{1}{x} \to 0^+$.

הפונקציות $f(\frac{1}{t}), g(\frac{1}{t})$ מקיימות את תנאי המקרה $t \to 0^+$ ולכן:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}$$

מכלל לופיטל שהוכחנו:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t^2}\cdot f'(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t^2}\cdot g'(\frac{1}{t})} == \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

הוכחת המקרה של $x \to -\infty$

נסמן: $t := \frac{1}{x} \to 0^-$.

הפונקציות $f(\frac{1}{t}), g(\frac{1}{t})$ מקיימות את תנאי המקרה $t \to 0^+$ ולכן:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}$$

מכלל לופיטל שהוכחנו:

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^-} \frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\frac{1}{t^2}\cdot f'(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t^2}\cdot g'(\frac{1}{t})} == \lim_{t\to 0^-} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

□

ובכך הוכחנו את כלל לופיטל עבור המקרה של $\frac{0}{0}$.

5.2 כלל לופיטל עבור הביטוי $\frac{*}{\infty}$

הצהרה: תהי $-\infty \le a \le \infty$ ויהיו פונקציות f ו-g גזירות בסביבה מנוקבת של a כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

ואם הגבול

$$b := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

קיים במובן הרחב (כלומר, b יכול להיות מספר ממשי או $\pm\infty$). אזי מתקיים

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

המשפט תקף גם עבור סביבה חד צדדית של a וגבולות חד-צדדיים מתאימים.

הוכחה.

הוכחת המקרה של $x \to a^+$

נניח ש-$\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$, וכן שגבול הנגזרות קיים:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b,$$

כאשר $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

נבחר נקודה $c > a$ כך שהפונקציות f, g גזירות בקטע (a, c), ונניח שיש סדרה $x_n \to a^+$ עם $x_n \in (a, c)$.

לכל n, ניישם את משפט הערך הממוצע המוכלל על הקטע $[x_n, c]$, ונקבל שקיימת נקודה $t \in (x_n, c)$ כך ש:

$$\frac{f(x_n) - f(c)}{g(x_n) - g(c)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

כעת נכתוב:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(c)}{g(x_n)} + \frac{f(c)}{g(x_n)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \cdot \frac{g(x_n) - g(c)}{g(x_n)} + \frac{f(c)}{g(x_n)}.$$

נשים לב ש-$g(x_n) \to \infty$, ולכן:

$$\frac{g(x_n) - g(c)}{g(x_n)} \to 1 \quad \text{ו-} \quad \frac{f(c)}{g(x_n)} \to 0.$$

וכן מאחר ש-$t \to a^+$, אז:

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \to b.$$

לכן נקבל:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to b.$$

מכיוון שהסדרה $x_n \to a^+$ הייתה שרירותית, זה מוכיח ש:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

הוכחת המקרה של $x \to a^-$

מקרה זה נובע מהמקרה הקודם.

נסמן: $t := -x \to 0^+$.

הפונקציות $f(-t), g(-t)$ מקיימות את תנאי המקרה $t \to 0^+$, ולכן:

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(-t)}{g(-t)}.$$

ולפי כלל לופיטל שכבר הוכחנו:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(-t)}{g(-t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(f(-t))'}{(g(-t))'}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-f'(-t)}{-g'(-t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(-t)}{g'(-t)}=\lim_{x\to a^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

הוכחת המקרה של $x\to a$

המקרה נובע מהמקרים החד-צדדיים $x\to a^+$ ו-$x\to a^-$. אם שני הגבולות קיימים ושווים, אז גם הגבול מכל הכיוונים קיים ושווה ל-b.

הוכחת המקרה של $x\to\infty$

נסמן: $t:=\frac{1}{x}\to 0^+$.

הפונקציות $f(1/t),g(1/t)$ מקיימות את תנאי המקרה של $t\to 0^+$, ולכן:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}.$$

ולפי כלל לופיטל:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(f(1/t))'}{(g(1/t))'}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{1}{t^2}f'(1/t)}{-\frac{1}{t^2}g'(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

הוכחת המקרה של $x\to-\infty$

נסמן: $t:=\frac{1}{x}\to 0^-$.

שוב, הפונקציות $f(1/t),g(1/t)$ מקיימות את תנאי המקרה של $t\to 0^-$, ולכן:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}.$$

ולפי כלל לופיטל:

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0^-}\frac{(f(1/t))'}{(g(1/t))'}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-\frac{1}{t^2}f'(1/t)}{-\frac{1}{t^2}g'(1/t)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

תודה על הקריאה.