מועד 1 - פתרון

שאלה 1

1) יהי $t>0$. נרשום בעזרת פיתוח טיילור מסדר 1 סביב נקודה a:

$$f(a+t)=f(a)+f'(a)t+\frac{f''(c)}{2}t^2 \quad ; \quad a<c<a+t$$

$$f(a-t)=f(a)-f'(a)t+\frac{f''(d)}{2}t^2 \quad ; \quad a-t<d<a$$

נחסר, ונקבל:

$$f(a+t)-f(a-t)=2f'(a)t+\frac{f''(c)-f''(d)}{2}t^2$$

$$\Rightarrow \quad 2t\cdot|f'(a)|=|2tf'(a)|=\left|f(a+t)-f(a-t)+\frac{f''(d)-f''(c)}{2}t^2\right| \leq$$

$$\leq |f(a+t)|+|f(a-t)|+\frac{t^2}{2}(|f''(c)|+|f''(d)|) \leq$$

$$\leq 2M_0+\frac{t^2}{2}(M_2+M_2)=2M_0+M_2t^2$$

ובכך הוכחנו כי לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים: $|f'(a)|\leq\frac{2M_0+M_2t^2}{2t}$

ולכן גם $M_1=\sup_{a\in\mathbb{R}}|f'(a)|\leq\frac{2M_0+M_2t^2}{2t} \Rightarrow 2M_1t\leq 2M_0+M_2t^2$

והאי שוויון האחרון מתקיים לכל $t>0$, לכל $t\geq 0$ הוא מתקיים באופן טריוויאלי כי M_0,M_1,M_2 הם מספרים אי שליליים.

2) מסעיף 1) נובע כי לכל t ממשי: $0\leq M_2t^2-2M_1t+2M_0$,

ולכן, הדסקרימיננטה של הביטוי מימין באגף היא מספר לא חיובי (אין לו שני שורשים שונים).

כלומר: $4M_1^2-8M_0M_2\leq 0 \Rightarrow M_1^2\leq 2M_0M_2$ -

כנדרש.

שאלה 2

נתבונן בפיתוח מקלורין מסדר 2 עם שארית בצורת לגרנז'

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 =$$

$$= \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{6}x^3$$

כאשר $0<c<x$ או $x<c<0$

נציב $x = 1, -1$ ונקבל:

$$f(1) = 1 = \frac{f''(0)}{2} + \frac{f^{(3)}(c_1)}{6}, \quad 0<c_1<1,$$

$$f(-1) = 0 = \frac{f''(0)}{2} - \frac{f^{(3)}(c_2)}{6}, \quad -1<c_2<0.$$

נחסר, ונקבל:

$$f(1) - f(-1) = 1 = \frac{1}{6}\left(f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2)\right)$$

כלומר: $f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2) = 6$, ולכן לפחות אחד מהמחוברים לא קטן מ-3.

שאלה 3

1) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \Leftarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \\ f''(x) = \frac{-2}{9}x^{-5/3}, \\ f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3} \end{cases}$

ניקח פיתוח טיילור של $f(x)$ סביב $x_0 = 27$:

$$\sqrt[3]{x} = f(27) + \frac{f'(27)}{1}(x-27) + \frac{f''(27)}{2!}(x-27)^2 + R_2(x)$$

כאשר: $R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-27)^3, \quad 27<c<x$

ניקח $x=30$, אזי:

$$\sqrt[3]{30} = 3 + \frac{1}{27}\cdot 3 + \left(\frac{-1}{3^7}\right)3^2 + R_2(30)$$

כאמור:

$$|R_2(30)| = \left| \frac{-\frac{10}{27} c^{-8/3}}{3!} 3^3 \right| \quad , \quad 27<c<30.$$

הפונקציה $x^{-8/3}$ יורדת, ולכן: $c^{-8/3}$ מקסימלי כאשר c מינימלי, ולכן:

$$|R_2(30)| \underset{c>27}{\le} \frac{10}{27}\cdot\frac{1}{3^8}\cdot\frac{1}{3!}\cdot 3^3 = \frac{5}{3^9} = \frac{5}{81\cdot 81\cdot 3} < \frac{5}{80\cdot 80\cdot 3} < \frac{5}{10^4}$$

ולכן – $\sqrt[3]{30} \approx 3+\frac{1}{9}-\frac{1}{3^5} \pm 5\cdot 10^{-4} \approx 3.107 \pm 5\cdot 10^{-4}$.

2) נרשום פיתוחי מקלורן מסדר 3 (ודאי!):

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_3(x)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+S_3(x)$$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+T_3(x)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+Q_3(x)$$

ע"י שימוש במשפט לפיו: אם $f^{(n)}(0)$ קיימת אז מתקיים עבור השארית בפיתוח מקלורן מסדר n סביב x – $r_n(x)$: $\frac{r_n(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,

נקבל:

$$\lim_{x\to0}\frac{R_3(x)}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{S_3(x)}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{T_3(x)}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{Q_3(x)}{x^3} = 0.$$

כעת נחשב:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x\cos x-(x+1)}{\tan x-\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_3(x)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+Q_3(x)\right)-(x+1)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+T_3(x)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+S_3(x)\right)} =$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x-\frac{x^3}{3}+Q_3(x)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_3(x)\right)+R_3(x)\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{12}-(x+1)}{\frac{x^3}{2}+T_3(x)-S_3(x)} =$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}+\frac{Q_3(x)}{x^3}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_3(x)\right)+\frac{R_3(x)}{x^3}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{T_3(x)}{x^3}-\frac{Q_3(x)}{x^3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$$