<u>תרגיל אלגברה ליניארית מספר 7</u>

1) הוכיחו או הפריכו

א) נגדיר $F[X]=\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,\middle|\, a_k\in F, n\in N\right\}$ **ונגדיר חיבור וכפל בסקלר ב** $F[X]$ **,**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)x^k, \alpha\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k)x^k.$$

הוכיחו ש $F[X]$ **מרחב וקטורי מעל שדה F.**

2) הוכח או הפרך :

א) $V=\left\{\begin{pmatrix} Z \\ \bar{Z}\end{pmatrix}, Z\in\mathbb{C}\right\}$ **הוא מרחב ויקטורי ביחס לחיבור רכיבי וכפל בסקלר (כמו מטריצות) .**

ב) $V=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : z=2y+3, y=x\right\}$ **הוא מרחב ויקטורי ביחס לחיבור רכיבי וכפל בסקלר (כמו מטריצות) .**

ג) $V=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]: 3\le \deg(p(x))\le 5\}$**, הוא מרחב ויקטורי ביחס לחיבור פולינומים מעל** $\mathbb{R}$ **.**

$\mathbb{R}[X]$ **הוא אוסף הפולינומים במשתנה** X **עם מקדמים ממשיים.**

3)

איזו מתתי הקבוצות הבאות של $\mathbb{R}^3$ מהווים תת מרחב ויקטורי של $\mathbb{R}^3$

1) $W_1 = \left\{ (x,y,z) \middle| x = y \right\}$

2) $W_2 = \left\{ (x,y,z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

3) $W_3 = \left\{ (x,y,z) \middle| x^2 + y^2 = z^2 \right\}$

4) $W_4 = \left\{ (x,y,z) \middle| y = 0 \right\}$

4)

יהיו V,U מרחבים וקטורים מעל אותו שדה F, נגדיר $U \times V$ את מרחב המכפלה מעל F באופן הבא:

$$U \times V = \left\{ (u,v), u \in U, v \in V \right\}$$

- סכום ויקטורים $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) := (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$.
- כפל בסקלר: $\alpha(u,v) = (\alpha u, \alpha v)$.

הוכיחו שמרחב המכפלה הוא מרחב וקטורי.

5)

יהי $V = \mathbb{R}^2$. נסתכל על תתי המרחבים הבאים:

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ **אוסף המטריצות האלכסניות.**
- $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R}, a+c=0, b+d=0 \right\}$ **אוסף המטריצות שבהן סכום כל עמודה הוא אפס. הוכיחו כי $V = U \oplus W$**