

מבוא לטופולוגיה - תרגיל 1

1. יהיו A, B, C תת קבוצות של הקבוצה X .
הוכיחו/הפריכו שארבעת הטעינות הבאות שקולות
(זאת אומרת, כולן מתקיימות או כולן לא מתקיימות):

$$A \subseteq B \quad (1)$$

$$A \cap B = A \quad (2)$$

$$A \cup B = B \quad (3)$$

$$B^c \subseteq A^c \quad (4)$$

2. יהיו $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ פונקציות.

הוכיחו/הפריכו:

א' אם $f \circ g$ היא חח"ע, אז g היא חח"ע.

ב' אם $f \circ g$ היא על, אז f היא על.

3. תיהי: $f: A \rightarrow B$ פונקציה ו- $C \subseteq B$, ו- $D \subseteq A$.
אי הוכיחו ש- $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ ו- $f^{-1}(f(D)) \supseteq D$

ב' הוכיחו ש- $f(f^{-1}(C)) = C$ אם f פונקצית על

ו- $f^{-1}(f(D)) = D$ אם f פונקציה חח"ע.

ג' תנו דוגמאות נגדיות כאשר $D \subsetneq f^{-1}(f(D))$

4. יהיו X, Y קבוצות $A, B \subseteq X; C, D \subseteq Y$ - תת קבוצות, $A_\alpha (\alpha \in I)$ ו-

$B_\beta (\beta \in J)$ משפחות תת קבוצות ב- X , ו- $f: A \rightarrow B$ - פונקציה.

הוכיחו:

$$(\forall \alpha \in I A_\alpha \subseteq B) \Rightarrow (\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq B$$

$$\forall \beta \in J ((\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq A_\beta)$$

$$(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \cap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

$$(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

$$B \cup (\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$$

$$B \cap (\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$$

$$(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) \cup (\cap_{\beta \in J} B_\beta) = \cap_{\alpha \in I, \beta \in J} (A_\alpha \cup B_\beta)$$

$$(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\cup_{\beta \in J} B_\beta) = \cup_{\alpha \in I, \beta \in J} (A_\alpha \cap B_\beta) \quad \text{ח'}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B) \quad \text{ט'}$$

$$C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D) \quad \text{י'}$$

$$f(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cup_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \quad \text{כ'}$$

$$f(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \quad \text{ל'}$$

$$f^{-1}(\cap_{\alpha \in I} C_\alpha) = \cap_{\alpha \in I} f^{-1}(C_\alpha) \quad \text{מ'}$$

$$f^{-1}(\cup_{\alpha \in I} C_\alpha) = \cup_{\alpha \in I} f^{-1}(C_\alpha) \quad \text{נ'}$$

5. יהיה (M, d) מרחב מטרי הוכיחו ש-

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z) \quad \text{א' לכל } x, y, z \in M \text{ מתקיים:}$$

ב' לכל $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ מתקיים:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

6. הגדרה. יהיה M מרחב מטרי. הסדרה $x_n \in M$ נקראת קבועה לבסוף

אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ וקיים $a \in M$ כך ש- $x_n = a$ $n \geq n_0$.

א' הוכיחו שסדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

ב' תהי סדרה במ"מ (M, d) המתכנסת ל- x וקיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל

$x_m \neq x_n$ מתקיים $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0$. הוכיחו שסדרה x_n קבועה לבסוף.

ג' תהי סדרה במ"מ (M, d) המתכנסת ל- x . תהי $\{x_n\} \subseteq M$

תת קבוצה סופית. הוכיחו שסדרה x_n קבועה לבסוף.

7. תזכורת. הפונקציה $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\rho(x, y) = |x - y| \quad \text{היא מטרחהקה על } \mathbb{R}.$$

יהיה M מרחב מטרי ו- $a \in M$. נגדיר פונקציה $f: (M, d) \rightarrow (\mathbb{R}, \rho)$ כך

$$f(x) = d(x, a) \quad x \in M$$

הוכיחו ש- f רציפה.