תמר בר און.
$tamarnachshoni@gmail.com$
שעות קבלה- בתיאום מראש במייל.
ב$math-wiki.com$
בצד ימין- "מבוא לאלגברה לינארית"
תוכלו למצוא בעמוד הקורס- קישור למה שהיה בקורס בשנים קודמות. (מבחנים/ בחנים).
לאתר יעלה בכל שבוע סיכום השיעור שאנחנו כותבים תוך כדי+ הקלטות.
חלוקת הציון:
שיעורי בית- 7%, בוחן- 8% ומבחן- 85%.
ציון הבוחן מהווה מגן למבחן.
שיעורי הבית הולכים להיות במערכת $xi.math-wiki.com$.
צריך להירשם דרך חשבון $gmail$.
תירשמו בפנים לקורס שלנו- $89-119$.
נושא ראשון: מערכות משוואות לינאריות
הגדרה: משוואה לינארית היא משוואה בכמה משתנים מהצורה הבאה:

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$$

משתנים עם מקדמים. שסוכמים אותם ומשווים בסוף לאיזשהו מספר.
המטרה: למצוא מי המשתנים שמקיימים את המשוואה.
דוגמאות:

$$2x=4$$

פתרון: $x=2$.

$$x+y=5$$

פתרון: יש אינסוף פתרונות. למשל: $x=1,y=4$.
דרך מקובלת לכתיבת הפתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

זה נקרא וקטור פתרון של המערכת.
עוד וקטורים שפותרים את המערכת:

$$\begin{pmatrix} \pi \\ 5-\pi \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$$

זאת מערכת של 2 משוואות לינאריות, עם שני משתנים.
פתרון: לא קיים שום וקטור שמקיים גם את המשוואה הראשונה וגם את המשוואה השניה.

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 4y = 3 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

זאת מערכת של 3 משוואות עם 2 נעלמים.
הערה: מספר המשוואות ומספר המשתנים/נעלמים לא חייב להיות שווה.
הערה 2: השמות של המשתנים לא משנים.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

המערכת הזאת שווה בדיוק למערכת הקודמת שהיצגנו.
איך פותרים מערכות משוואות לינאריות?
כשאנחנו אומרים "לפתור מערכת" מתכוונים לדבר הבא:
1. אנחנו צריכים להכריע האם יש לה פתרון, ואם כן- האם יש לה פתרון יחיד או אינסוף פתרונות.
2. אם אין פתרון- סיימנו.
אם יש פתרון יחיד למצוא את הפתרון.
אם יש אינסוף פתרונות- לתאר את האוסף של כל הפתרונות.
לדוגמא:

$$x + y = 5$$

הפתרונות שלה הם כל הוקטורים מהצורה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 5-a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

כלומר, a יכול להיות כל מספר ממשי.
כלי עבודה: מטריצות.
הגדרה: מטריצה היא טבלה של מספרים. למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

עם כל מספר שורות ועמודות.
לכל מערכת משוואות אנחנו מתאימים מטריצה שמייצגת את המערכת.
כל שורה במטריצה מייצגת לנו משוואה אחת.

שמים בכל שורה את המספרים שהם המקדמים של המשתנים לפי הסדר.
ובסוף שמים את ה"מקדם החופשי" (המספר שמופיע אחרי השוויון).
בין מקדמי המשתנים למקדם החופשי- שמים קו.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

דוגמא הפוכה:
מי מערכת המשוואות שמתאימה למטריצה הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

זאת מערכת של 3 משוואות ו3 נעלמים.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 = 5 \end{cases}$$

אפשר לכתוב את אותן משוואות עם שמות אחרים של המשתנים. למשל, x, y, z.
הגדרה: איבר מוביל- הראשון בשורה שלו ששונה מ0.
לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{1} & 2 \\ \bar{2} & 2 & 6 \\ \bar{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל שורה של מטריצה היא או:
1. שורת אפסים (כל האיברים בה הם 0).
2. יש בה איבר מוביל אחד.

הגדרה: מטריצה נקראת מדורגת אם:
1. כל איבר מוביל נמצא מימין לאיברים המובילים בשורות שמעליו.
2. כל שורות האפסים למטה. כלומר, אם יש שורת אפסים, לא מופיעה מתחתיה שורה שאינה שורת אפסים.

דוגמאות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמאות נגדיות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

הגדרה: מטריצה נקראת מדורגת קנונית אם היא:
1. מדורגת
2. כל האיברים המובילים שווים ל1
3. מעל כל איבר מוביל יש רק אפסים. (או שאין כלום)

דוגמאות למטריצות מדורגות קנונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

המטרה: להגיע צורה מדורגת קנונית. זאת הצורה שממנה הפתרון של המטריצה כבר יהיה מיידי.

האמצעי: דירוג.

יש 3 פעולות דירוג שמותר לעשות:
1. החלפת שורות: $R_i \leftrightarrow R_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. כפל שורה בסקלר/מספר שונה מ0: $R_i \to \alpha R_i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. הוספת כפולת שורה לשורה אחרת: $R_i \to R_i + \alpha R_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אלגוריתם: בהינתן מטריצה, נרצה להפעיל עליה פעולות דירוג (פעולות שורה) בשביל לקבל בסוף מטריצה מדורגת קנונית.

שלב ראשון:

נרצה שבשורה הראשונה עמודה ראשונה (הפינה השמאלית העליונה של המטריצה) יופיע המספר 1.

אם יש שם מספר אחר שונה מ0- נחלק בו. (כלומר, נכפול בהופכי).

אם יש בה 0 - נחליף שורות עם שורה אחר שבה אין 0.

אם בכל השורות בעמודה הראשונה יש 0 - עוברים לעמודה הבאה.
אחרי שדאגנו שיהיה במקום הזה 1 - אפשר להשתמש בפעולה השלישית, ולחסר מכל שורה כפולה מתאימה של השורה הראשונה כדי לאפס את האיברים שמתחת ל1.
כשגומרים לטפל בעמודה הראשונה- עוברים לעמודה השניה ועושים אותו דבר.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to 0.5R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to 0.5R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 0.5R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1.25 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y = 1.25 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y = 0.5 \end{cases}$$

$$x = 1.25, y = 0.5$$

$$\left(\begin{array}{c} 1.25 \\ 0.5 \end{array}\right)$$

הגדרה: משתנה שבעמודה שלו יש איבר מוביל (באחת מהשורות) נקרא משתנה תלוי.
אחרת הוא נקרא משתנה חופשי.
יש 3 אפשרויות שיכולות להתקבל:
1. שורת סתירה- אין פתרון. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & a \neq 0 \end{array}\right)$

$$0 \cdot x_1 + ... + 0 \cdot x_n = a$$

2. אין שורת סתירה+ בכל עמודה יש איבר מוביל- פתרון יחיד. נוכל לקרוא אותו מהעמודה שמעבר לקו.
3. אין שורת סתירה+ קיים משתנה חופשי - אינסוף פתרונות.
לכל משתנה חופשי ניתן איזשהו t, s, r. ואת המשתנים התלויים נבטא באמצעות המשתנים החופשיים.
דוגמאות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

לא הגענו לצורה מדורגת קנונית, אבל הגענו לשורת סתירה.
למערכת אין פתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6} R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

בעמודה השלישית אין איבר מוביל. זה אומר שהמשתנה השלישי, נקרא לו צז הוא משתנה חופשי. נציב $z = t$.

השורה השניה מייצגת את המשווה:

$$y + \frac{2}{3} z = \frac{2}{3}$$

לכן $y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} t$

השורה הראשונה מייצגת את המשוואה:

$$x - \frac{4}{3} z = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} t$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{3} + \frac{4}{3} t \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$